3 4 5

Terne pitagoriche e teorema di Pitagora,
numeri e triangoli

Riccardo Ricci: Dipartimento di Matematica “U.Dini”
ricci@math.unifi.it

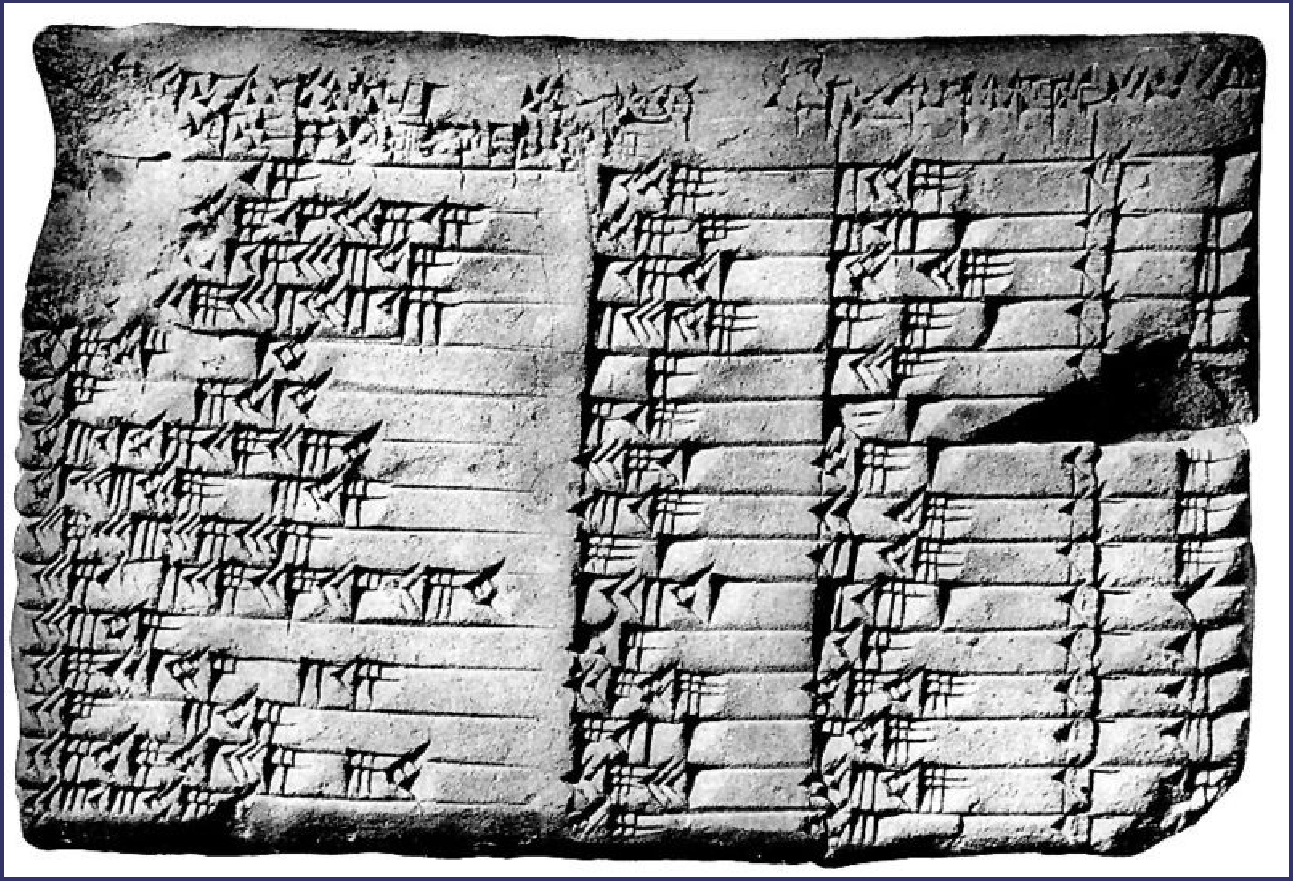
Qualche osservazione preliminare sul Teorema di Pitagora e le terne pitagoriche

Sembra difficile immaginarne una origine basata su osservazioni “puramente geometriche”

I primi documenti storici sono tutti esempi numerici (terne pitagoriche piuttosto che teorema di Pitago-ra)

Il papiro di Berlino propone un quesito della forma: l'area di un quadrato (100) è la somma delle aree di due quadrati più piccoli: il lato del più piccolo di questi è uguale a 1/2+1/4 del lato dell'altro. Trovare la lunghezza dei lati.   (*Non c'è però un riferimento ai triangoli*.) Un secondo problema pone la stessa questione con area 400.

La tavola Plimpton 332



Risale al regno di Hammurabi, prima metà del 18° secolo AC

TABLE 1
The Extant Contents of Plimpton 322, with Errors Corrected and the Third Element of the Triple Added

I. (damaged), d^2/l^2 or b^2/l^2	II. Square-side of the width, b	III. Square-side of the diagonal, d	IV. Its name	(Square-side of the length, l)
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 20
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	8	16
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 54
(1) 33 45	45	1 15	11	1
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12	40
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	13	4
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14	45
(1) 23 13 46 40	28	53	15	45

Traslitterazione della tavoletta Plimpton, da Eleanor Robson, Historia Math. 2001
La riga 11, passando dalla notazione sessadecimale alla decimale è 45, 75, 60, ovvero 3, 5, 4 (moltiplicati per 15)
La riga 1 contiene la terna 119, 169, 120
La riga 5 contiene un errore nella colonna aggiunta dalla Robson, 1 20 invece di 1 02: la terna è 65, 97, 72

Divagazione sul Teorema di Pitagora

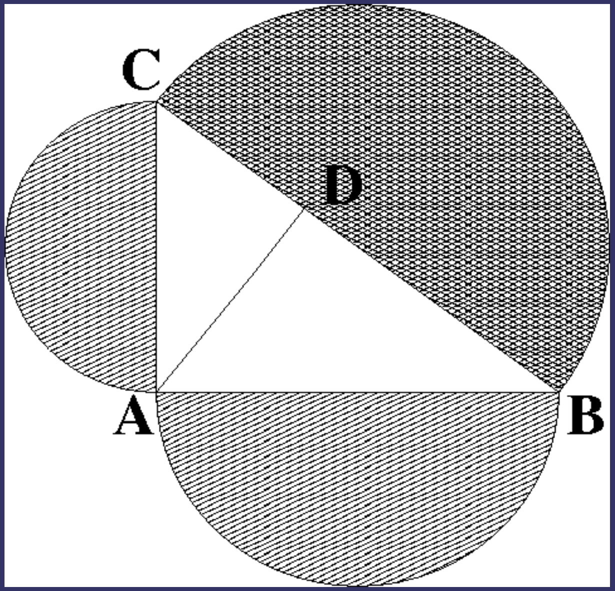
Negli Elementi di Euclide ci sono due enunciati (e due dimostrazioni) del Teorema: Libro I n.47 e Libro VI n.31 (il libro sulle similitudini).

Il secondo enunciato è una generalizzazione del Teorema:
“Nei triangoli rettangoli la forma (εἶδος) sul lato che sottende l’angolo retto (ipotenusa) è uguale alle forme sui lati che comprendono l’angolo retto (cateti).”

La dimostrazione è molto più “istruttiva” della costruzione del primo libro e si basa su due osservazioni fondamentali:

1) Costruita una qualsiasi figura su un segmento, l’area di questa figura è data dalla area del quadrato costruito sul segmento moltiplicata per un *fattore di forma* che si conserva in qualsiasi similitudine.

2) Il triangolo rettangolo può essere diviso in due triangoli, *entrambi* simili al triangolo di partenza (ottenuti tracciando l’altezza relativa all’ipotenusa) in cui i cateti del triangolo originario sono le ipotenuse dei triangoli simili così ottenuti.



Ne segue che, come l’area del triangolo di partenza è la somma delle aree dei due triangoli, così l’area di una qualsiasi figura costruita sull’ipotenusa è la somma delle aree di figure simili costruite sui cateti.

La proprietà 2) NON è banale. Conosco un solo altro esempio di una classe di figure che godono di questa proprietà: il rettangolo “A4” e i parallelogrammi ottenuti dalle sue “deformazioni”.

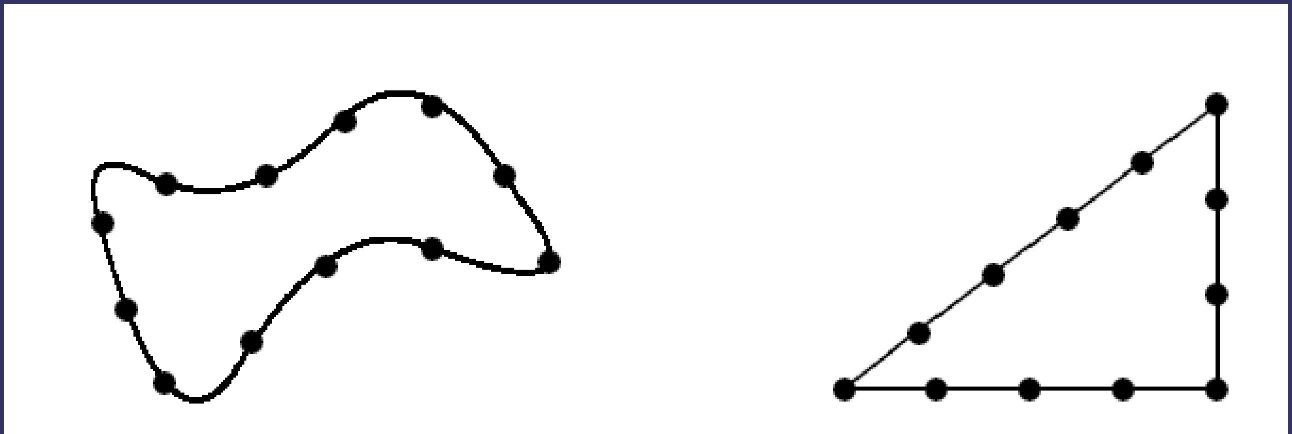
Come costruire un angolo retto

Ovviamente con “riga e compasso”!
(C'era una volta ...
- Un re-! diranno subito ...)

Oppure piegando un foglio di carta.

Ma immedesimatevi con il leggendario **giardiniere** (quello che fa linee rette, cerchi ed ellissi con filo e picchetti)

Soluzione “3 4 5”



Che sia questa “osservazione” l’origine del “teorema di Pitagora”?

Terne pitagoriche

(3,4,5) è un "terna pitagorica" ovvero una soluzione dell'equazione diofantea (cioè di cui si cercano soluzioni intere)

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Questa non è l'unica soluzione di questa equazione:
è immediato accorgersi che ogni terna di numeri ottenuta moltiplicando una terna pitagorica per un numero intero è anch'essa una terna pitagorica (p.e. la terna (45, 75, 60) riportata nella tavola Plimton).
Quindi ci sono infinite terne, almeno di questo tipo. Ma queste "non contano" in quanto definiscono sempre lo stesso triangolo a meno della scelta dell'unità di lunghezza (ovvero a meno di similitudini).
<u>Vogliamo quindi che i tre numeri della terna siano privi di fattori comuni (</u>chiameremo queste terne T. P. Primitive)

Nella tavola Plimton sono riportate altre soluzioni che non sono riconducibili alla terna (3,4,5) tramite una similitudine, p.e. (119, 169, 120).

Quante sono allora le "vere" terne pitagoriche?

A caccia di terne pitagoriche

Cominciamo la ricerca un po' a tentoni cercando di sfruttare tutto ciò che abbia a che fare con i quadrati di numeri.

Per esempio sappiamo che sommando i numeri dispari in ordine si ottiene sempre un quadrato:

$$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (2n-1) = n^2$$

Se fermiamo la somma quando ***2n-1*** è un quadrato, p.e. 49, allora abbiamo

$$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (2n-3) + (2n-1) = (n-1)^2 + (2n-1) = n^2$$

Es. $2n-1=49$, $n=25$ e quindi $(7, 24, 25)$ è una terna pitagorica.

E' chiaro che in questo modo otteniamo sempre terne dove il "cateto maggiore" e l'"ipotenusa" differiscono per <u>una unità</u> $(\sqrt{(2n-1)}, n-1, n)$, e quindi queste saranno **tutte <u>terne primitive</u>**.

Abbiamo appena dimostrato che esistono infinite PPT

Avevamo anche visto nella tavola Plimpton che ci sono terne che non possono essere ottenute dalla costruzione precedente:

p.e. (119, 169, 120) ha i <u>due cateti che differiscono per una unità</u>.

<u>Ovvero siamo ancora lontani dall’aver un catalogo completo di queste terne</u>.

Prima di passare alla soluzione del problema di classificazione, vediamo alcune proprietà delle terne primitive.

(è un ottimo esercizio da far fare a una classe)

Parità dei numeri di una terna:

I tre numeri non possono essere tutti pari
(altrimenti la terna non sarebbe primitiva)

I tre numeri non possono essere tutti dispari
(il quadrato di un dispari è dispari ma la somma di due dispari è pari)

Non ci possono essere due numeri pari e uno dispari

Quindi una PPT deve avere due numeri dispari e uno pari

L'ipotenusa DEVE essere dispari (altrimenti il suo quadrato sarebbe la somma di due dispari e quindi divisibile per 2 ma non per 4)

Si può andare avanti un bel po': la pagina di Wikipedia Pythagorean_triple.html elenca più di venti proprietà "elementari" delle PPT, p.e.
Qualsiasi sia n, esistono n PPT con ipotenuse diverse ma la stessa area

La formula di EUCLIDE

La soluzione al problema di classificazione si trova negli Elementi di EUCLIDE (lemma 1 prima della Proposizione 29 del libro X : "*trovare due numeri quadrati la cui somma sia ancora un quadrato*")

Il libro X è dedicato alla classificazione degli "*incommensurabili*".

Euclide usa le terne per studiare le proprietà di alcuni numeri IRRAZIONALI

(a,b,c) sia una terna primitiva, possiamo assumere che b sia pari (eventualmente scambiando a con b)

$$c^2 - a^2 = b^2$$

Poniamo $b^2 = uv$ con u e v entrambi pari con $u = c + a$ e $v = c - a$, da cui

$$c = (u + v) / 2 \quad \text{e} \quad a = (u - v) / 2$$

Affinché uv sia un quadrato dobbiamo avere

$$u = k\,n^2 \quad \text{e} \quad v = k\,m^2$$

con m e n primi tra loro; inoltre k deve essere un fattore anche di $2c = u + v$ e $2a = u - v$

Ma a e c sono primi tra loro e u e v sono pari quindi dobbiamo avere

$$k = 2$$

Abbiamo finalmente la classificazione cercata:

Siano n e m , con n>m, due numeri primi tra loro e di diversa parità. Allora la terna (a,b,c) con

Formula di Euclide

$$c = n^2 + m^2$$

$$a = n^2 - m^2$$

$$b = 2\,n\,m$$

è una terna pitagorica primitiva.
Inoltre tutte le terne primitive sono ottenute da questa regola.

Rappresentazione alternativa:

$$a = n\,m, \quad b = (n^2 - m^2)/2, \; c = (n^2 + m^2)/2$$

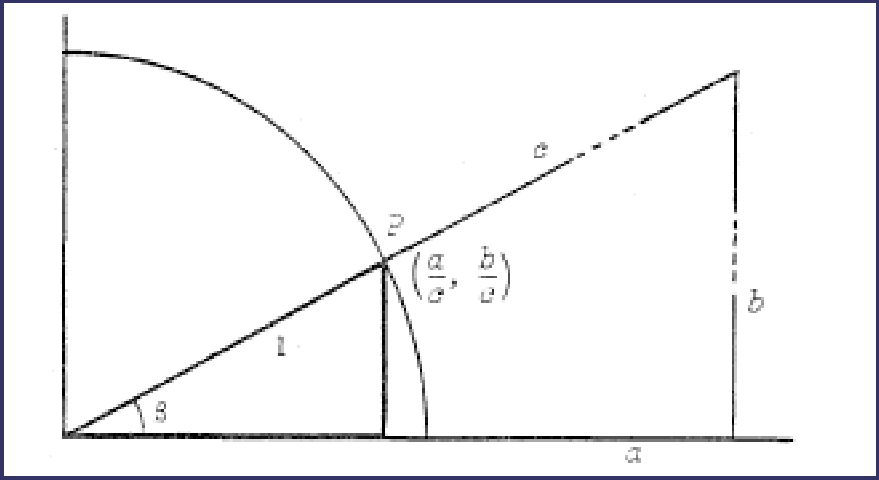
con n>m dispari primi tra loro.

Waclaw Sierpinski, Pythagorean Triangles, The Scripta Mathematica Studies, no. 9, Yeshiva Univ., New. York, 1962.

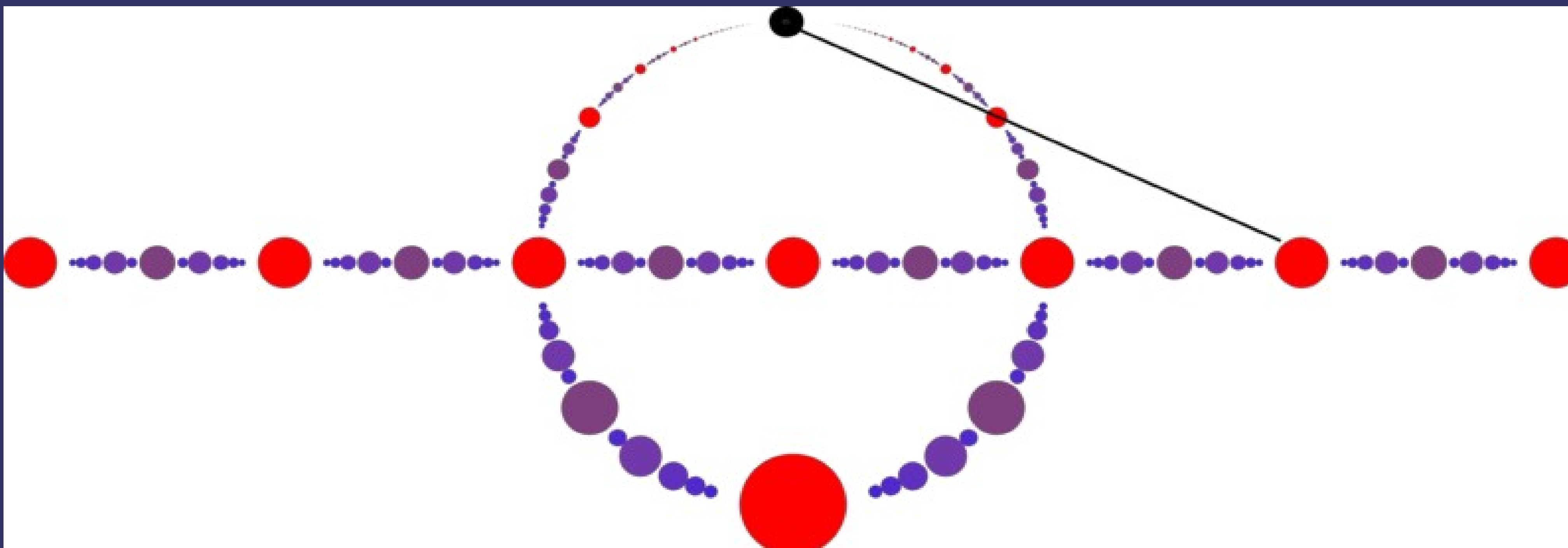
Ritorno alla geometria (analitica)

Possiamo “normalizzare” i triangoli associati alle terne pitagoriche dividendo i tre lati per l'ipotenusa.
Otteniamo un triangolo con ipotenusa unitaria. Possiamo pensare a questo triangolo come avente un vertice (diverso da quello dell'angolo retto) posto nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali, e il cateto maggiore che giace sull'asse delle ascisse.
Il secondo vertice sull'ipotenusa si troverà sulla circonferenza di raggio 1 (in realtà sull'arco 0-π/4) . Le coordinate di questo punto saranno (a/c, b/c) che sono numeri razionali.

Ma abbiamo dimostrato che ci sono infinite PPT, ognuna delle quali determina uno (e uno solo) di questi triangoli).
<u>Quindi ci sono infiniti punti di coordinate razionali sulla circonferenza unitaria.</u>



Ma questa non è una “scoperta” perché la presenza di infiniti punti di coordinate razionali sulla sfera unitaria si può facilmente ricavare dalla **trasformazione stereografica**.

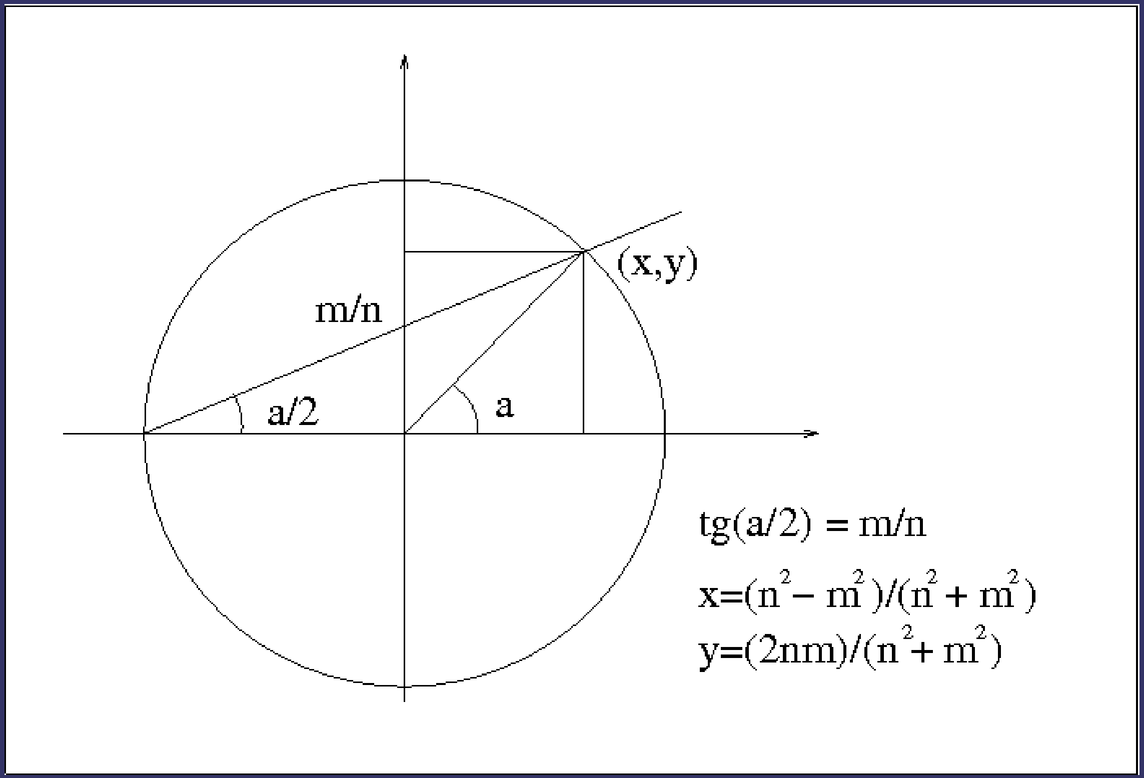


Se indichiamo con *m/n* l'ascissa del punto proiettato sull'asse delle ascisse (nella figura *m>n*) allora invertendo la trasformazione otteniamo le coordinate del punto sulla circonferenza in funzione di *m* e *n.*

$$\left(\frac{2mn}{n^2+m^2}, \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\right)$$

Le formule precedenti diventano ancora più familiari se ruotiamo il disegno (scambiando la x con la y) e proiettando i punti sulla semi-circonferenza che non contiene il centro della proiezione

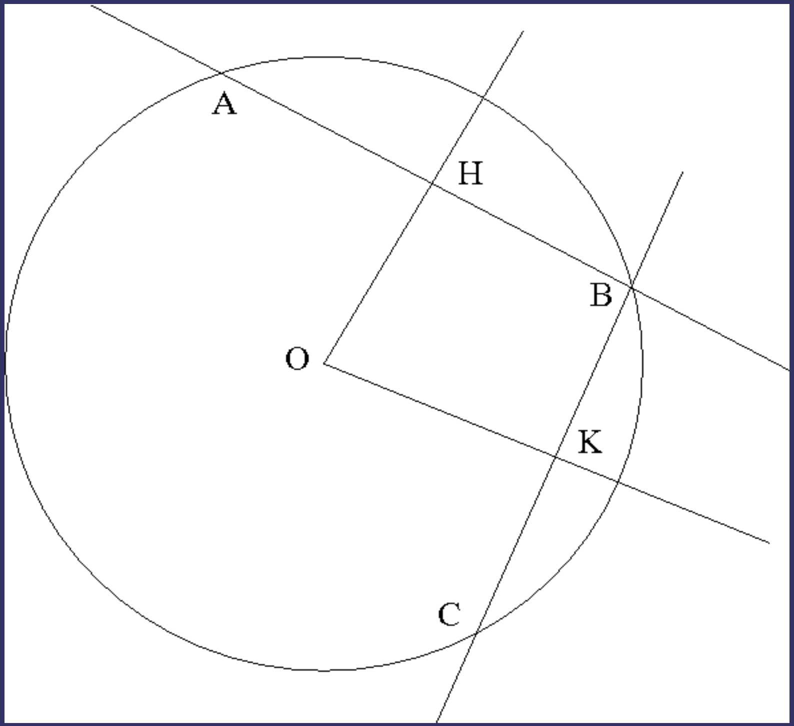
Il legame tra le coordinate e l'intercetta del segmento proiettante con l'asse delle ordinate è la stessa formula della proiezione stereografica (con x e y scambiati) e non è altro che la formula che permette di esprimere <u>seni e coseni di un angolo in funzione della tangente dell'angolo metà.</u>



Ancora sui punti razionali sulle circonferenze.

Abbiamo visto che la circ. $x^2 + y^2 = 1$ contiene infiniti punti con coordinate razionali:
Cosa succede se cambiamo circonferenza (raggio o centro).

Una circonferenza contiene: infiniti, due, uno o nessun punto di coordinate razionali.
Nel primo caso il centro ha coordinate razionali.
Nel secondo caso le coordinate del centro sono razionalmente dipendenti.



La dimostrazione è alla portata (teorica) di uno studente liceale, provate!
Ovviamente bisogna indovinare la chiave della dimostrazione.

Curiosità matematiche sulle PPT

Generazione “automatica”: partiamo dalla PPT **21 220 221**

In ogni elemento della terna inseriamo uno zero dopo ogni due

21 220 221 ------> 201 20200 20201

E andiamo avanti così:

2001 2002000 2002001
20001 200020000 200020001
200001 20000200000 20000200001
2000001 2000002000000 2000002000001
20000001 200000020000000 200000020000001
200000001 20000000200000000 20000000200000001

Queste sono tutte PPT, perché?

Come funzione la “generazione automatica”

Se *a* è il cateto dispari e *b* quello pari, abbiamo una successione infinita di PPT dove $c - b = 1$. Dalla formula di Euclide (con m, n dispari) abbiamo $m = 1$ e quindi

$$a = n \qquad b = (n^2 - 1)/2 \qquad c = (n^2 + 1)/2$$

dove $n = 2k + 1$ è un numero dispari: possiamo riscrivere la formula precedente

$$a = 2k + 1 \qquad b = 2k(k - 1) \qquad c = 2k(k + 1) + 1$$

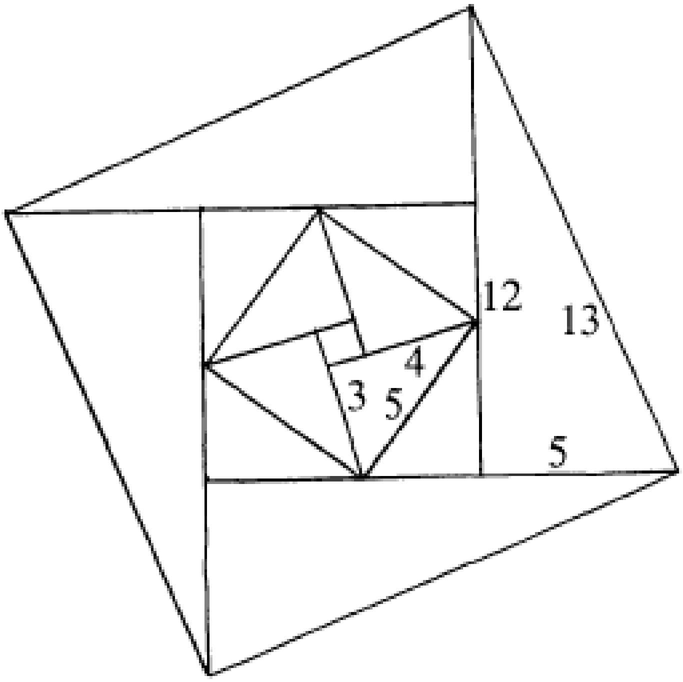
Se prendiamo $k = 10^m$ con m intero, otteniamo

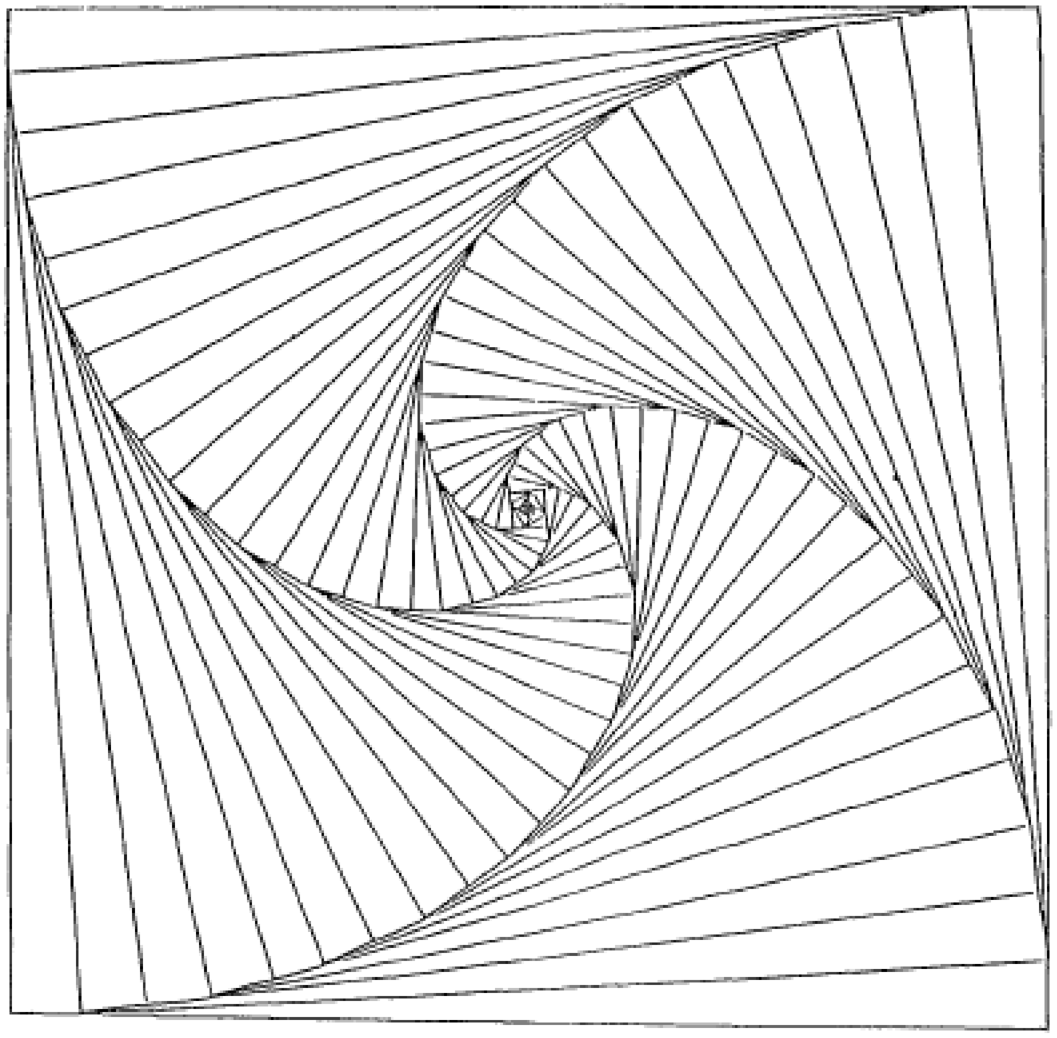
$a = 2\ 10^m + 1 = 20..........01$ (m-1 zeri)

$b = 2\ 10^{2m} + 2\ 10^m = 20...020...0$ (m-1 zeri, m zeri)

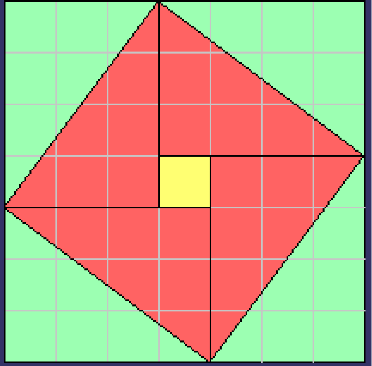
$c = 2\ 10^{2m} + 2\ 10^m + 1 = 20...020...01$ (m-1 zeri, m-1 zeri)

Pavimentazioni con triangoli “interi” (PPT)





A Pythagorean Tiling of the Plane, Ernest J. Eckert and Hugo Haagensen, Mathematics Magazine, Vol. 62, No. 3 (Jun., 1989), p. 175



Perché 3 4 5

La terra (3,4,5) è la più semplice (e piccola) terna pitagorica. Ma non solo, essa ha uno statuto speciale tra tutte le PPT.

Ogni altra terna pitagorica primitiva è ottenuta in uno e un sol modo a partire da (3,4,5)

Teorema di Barning (1963)

Ogni terna pitagorica primitiva (a, b, c) con a dispari e b pari ha un'unica rappresentazione come prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M_{d_1} M_{d_2} \dots M_{d_n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

per qualche $n \geq 0, \quad (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \{1, 2, 3\}^n.$

dove

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

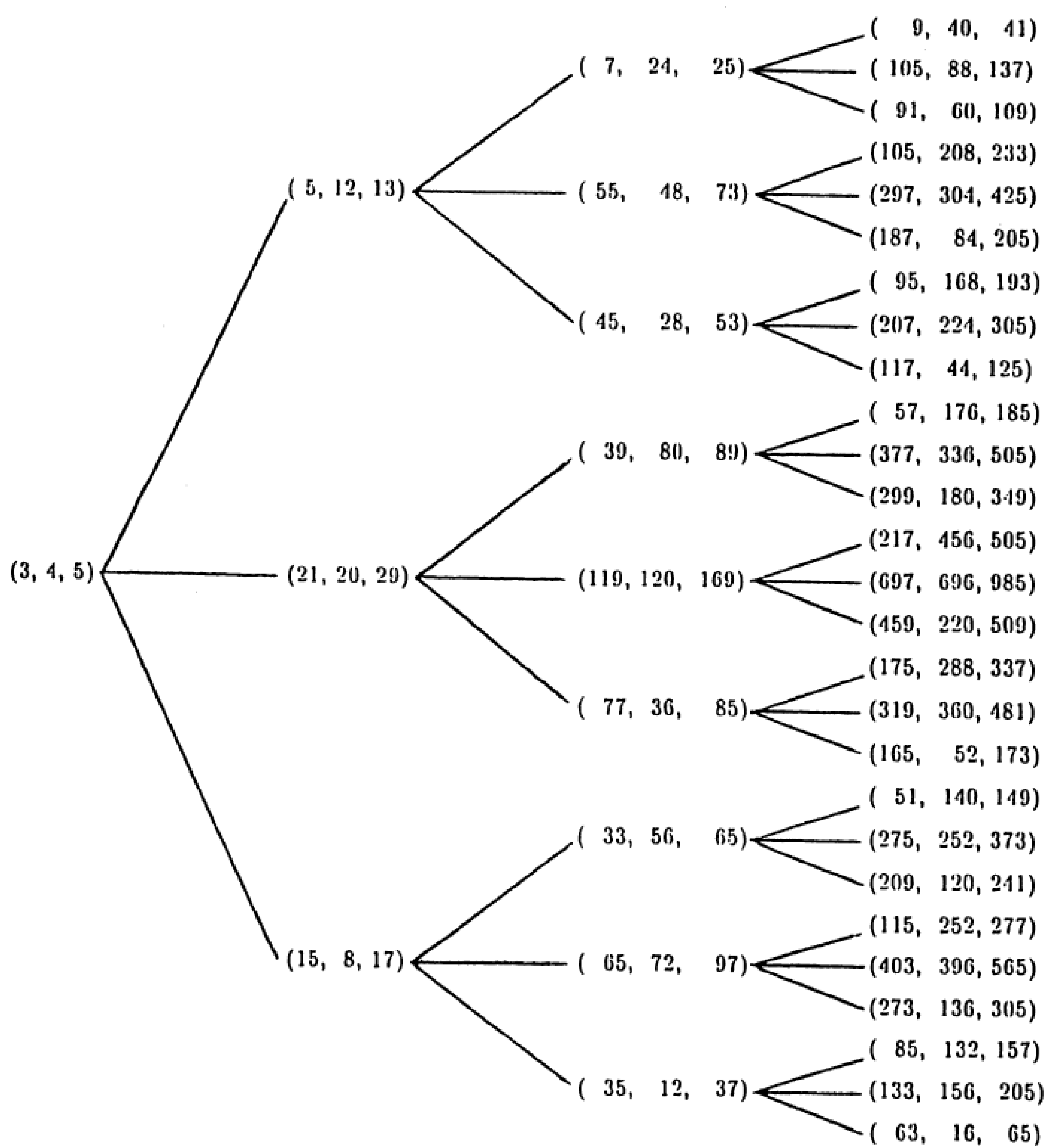
Tutte le terne ottenute in questo modo sono PPT.
Per ottenere le terne con a pari e b dispari si fa la stessa cosa partendo dalla terna (4,3,5)

Tavola “genealogica” delle PPT

Il ramo ascendente contiene le terne dove ipotenusa - cateto maggiore =1 (molt. M_1)

in quello discendente ipotenusa - cateto maggiore =2 (molt. M_3)

Nel ramo centrale i cateti differiscono di 1 (molt. M_2)



Spiegazione di questa generazione

Cominciamo con “complicarci un po' la vita” considerando, accanto alle PPT, le terne pitagoriche primitive con segno SPPT, dove i due “cateti” *a* e *b* possono essere negativi (*c* sarà invece sempre positivo.) Se pensiamo a rappresentare le terne nel piano cartesiano questo significa che eliminiamo la restrizione che il triangolo debba stare nel primo quadrante.

In questo ambito l'equazione

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ha tre ovvie simmetrie

$$a \text{ -----> } -a \quad \text{e} \quad b \text{ ----> } -b$$

(che mandano un triangolo nel triangolo equivalente in uno degli altri tre quadranti)

Ma esiste una terza simmetria “nascosta”

La quarta simmetria

Per far apparire questa simmetria dobbiamo cambiare variabili

Definiamo

$m = c - a$		$a = q + m$
$n = c - b$	<----->	$b = q + n$
$q = a + b - c$		$c = q + m + n$

l'equazione

$$a^2 + b^2 = c^2$$

diventa

$$q^2 = 2\, m\, n$$

e la “nuova” simmetria è $q \longrightarrow -q$

ovvero

$$
\begin{aligned}
a' &= q' + m' &&= a - 2q &&= 2c - a - 2b,\\
b' &= q' + n' &&= b - 2q &&= 2c - 2a - b,\\
c' &= q' + m' + n' &&= c - 2q &&= 3c - 2a - 2b,
\end{aligned}
$$

che in notazione matriciale possiamo scrivere

$$
\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =: I \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
$$

La matrice I^2 è una involuzione, cioè I^2 = *id*

In questa trasformazione, partendo con *a, b > 0 ,* almeno una delle due cambia di segno. Possiamo tornare a una PPT prendendo i valori assoluti, il che in notazione matriciale si fa moltiplicando per una delle tre matrici

diag (-1, 1, 1) , diag (1, -1, 1) o *diag (-1, -1, 1)*

Così otteniamo una nuova PPT con la nuova “ipotenusa” minore di quella di partenza, $c' < c$.

Questa “discesa” termina sempre nella terna (3,4,5) se la PPT ha il primo elemento dispari (altrimenti termina in (4,3,5))

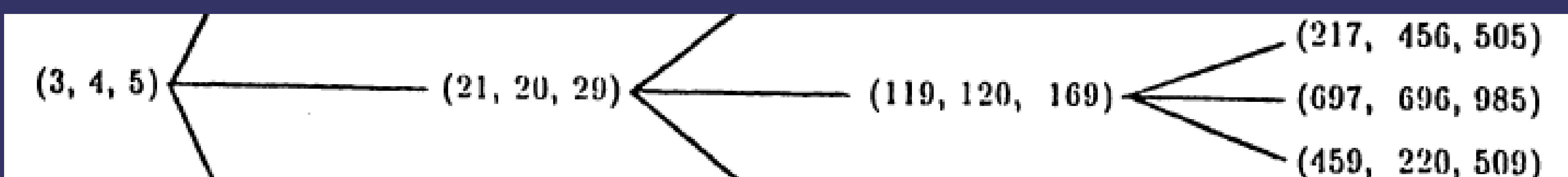
Possiamo invertire questa trasformazione moltiplicando per le matrici le matrici inverse che sono proprio le matrici

M_1 , M_2 e M_3

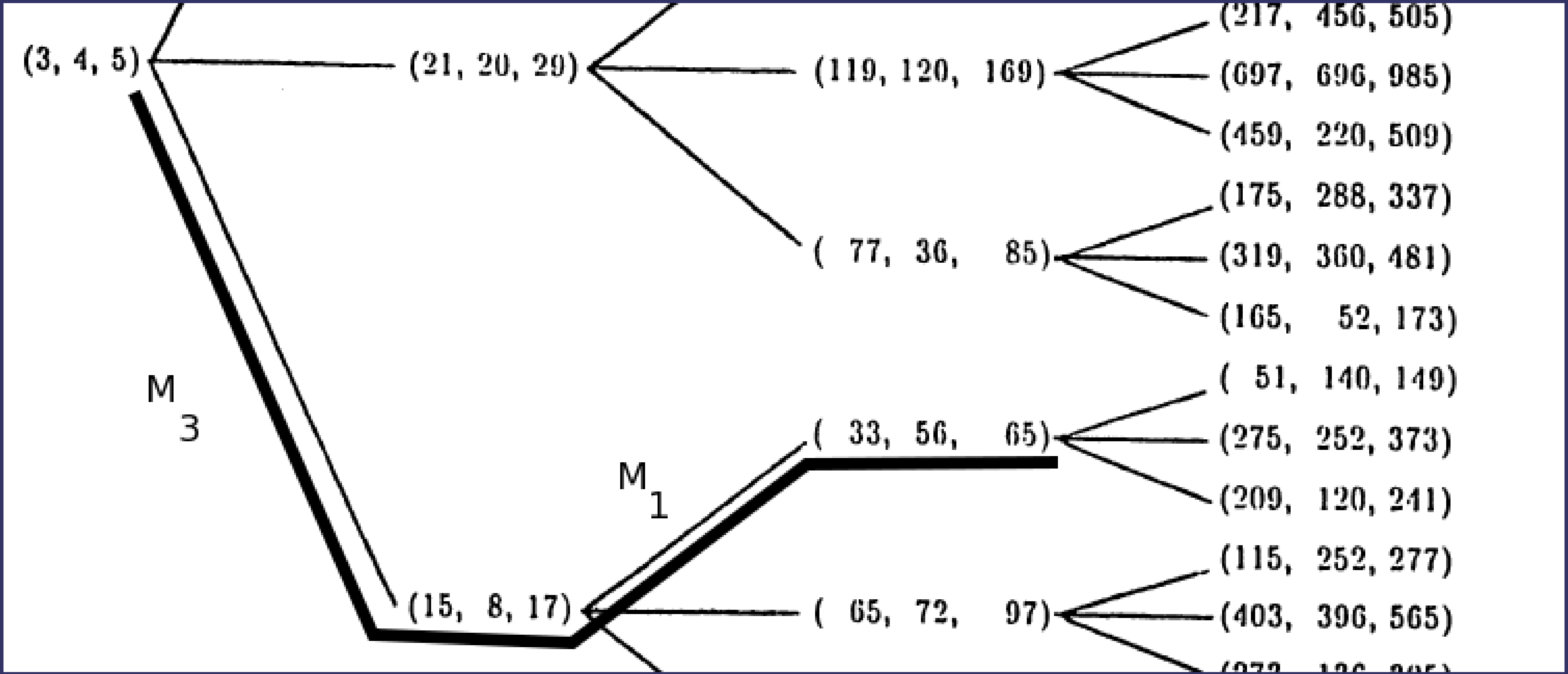
Cammini nell'albero

Partiamo dalla terna (3,4,5) e moltiplichiamo sempre per la matrice M_2

In questo caso è facile capire cosa succede: tutte le matrici così ottenute hanno i cateti che differiscono di uno e sono sempre più “grandi”. Normalizzando (dividendo per c) si ottiene una successione di triangoli che converge verso il triangolo rettangolo isoscele. Prendendo i rapporti tra il cateto minore e l'ipotenusa e tra cateto maggiore e ipotenusa otteniamo due successioni che approssimano da sotto e da sopra la radice di due



Cosa succede se si applicano alternatamente la matrice M_3 e M_1, ovvero se a ogni passo si “scende” e poi si “risale” nel grafico?



La risposta è interessante di per sé: <u>si converge verso il triangolo rettangolo "metà" del triangolo equilatero</u>.

Ma ancora più interessante è come lo si "dimostra"

Possiamo andare avanti di due passi alla volta ovvero pensare alla successione come all'applicazione ripetuta della matrice

$$M_1 \cdot M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -4 & 7 & 8 \\ -4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Se la forma del triangolo si "stabilizza", significa che la PPT verrà trasformata in una nuova PPT "molto vicina" a una terna simile, cioè ottenuta dalla precedente moltiplicandola per un numero (non necessariamente un numero intero).
Questo sarà "vero" nel limite, quindi la forma limite sarà data da un triangolo (non "pitagorico") trasformato in un suo multiplo dalla trasformazione M_1M_3.

Determinare queste terne è quello che in matematica va sotto il nome di *Problema degli autovettori e autovalori* della matrice, ovvero la ricerca dei vettori che le matrice trasforma in multipli di se stessi (l'autovalore è il fattore moltiplicativo)

La soluzione nel nostro caso si ottiene abbastanza facilmente, anche perché la ricerca dell'autovalore, che è la soluzione di un'equazione di terzo grado, è facilitata dal fatto che 1 è autovalore con autovettore associato (2,0,1).
Le altre due radici sono $7+4\sqrt{3}$ e $7-4\sqrt{3}$.

Se consideriamo l'autovalore positivo maggiore di uno abbiamo

$$M_1 \cdot M_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -4 & 7 & 8 \\ -4 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = (7+4\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Siti web o pagine dedicate alle terne pitagoriche (i più interessanti)

http://www.math.rutgers.edu/~erowland/pythagoreantriples-project.html

http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Pythag/pythag.html

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/pythTriple.shtml
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PT_matrix.shtml

http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple

http://www.pythag.net/triples.html

Aggiungo tre sole referenze, tra le moltissime possibili

W. Sierpinski, Pythagorean Triangles, Dover, 2003 (reprint da
Scripta Mathematica Studies, 1962)

Ernest J. Eckert , Primitive Pythagorean Triples, The College Mathematics Journal,
Vol. 23, No. 5 (Nov., 1992),

D. Romik, The dinamics of Pythagorean Triples, TAMS (360), 2008