Dal problema della lumaca al fiocco di neve in sei gradi di separazione

Andrea Colesanti

Mathesis Firenze
5 ottobre 2016

Questa presentazione nasce dalla tesi di Laurea di Chiara Baglioni, discussa nel 2015 presso l'Università di Firenze.

La teoria dei sei gradi di separazione

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

Esempio. Prendiamo il dottor Giovanni Biagioli, di Pistoia, e la principessa Aiko, appartenente alla famiglia imperiale del Giappone.

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

Esempio. Prendiamo il dottor Giovanni Biagioli, di Pistoia, e la principessa Aiko, appartenente alla famiglia imperiale del Giappone. Secondo la teoria esistono cinque persone, A, B, C, D, E, tali che:

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

Esempio. Prendiamo il dottor Giovanni Biagioli, di Pistoia, e la principessa Aiko, appartenente alla famiglia imperiale del Giappone. Secondo la teoria esistono cinque persone, A, B, C, D, E, tali che:

1. Giovanni Biagioli conosce personalmente A;

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

Esempio. Prendiamo il dottor Giovanni Biagioli, di Pistoia, e la principessa Aiko, appartenente alla famiglia imperiale del Giappone. Secondo la teoria esistono cinque persone, A, B, C, D, E, tali che:

1. Giovanni Biagioli conosce personalmente A;
2. A conosce personalmente B;

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

Esempio. Prendiamo il dottor Giovanni Biagioli, di Pistoia, e la principessa Aiko, appartenente alla famiglia imperiale del Giappone. Secondo la teoria esistono cinque persone, A, B, C, D, E, tali che:

1. Giovanni Biagioli conosce personalmente A;
2. A conosce personalmente B;
3. B conosce personalmente C;

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

Esempio. Prendiamo il dottor Giovanni Biagioli, di Pistoia, e la principessa Aiko, appartenente alla famiglia imperiale del Giappone. Secondo la teoria esistono cinque persone, A, B, C, D, E, tali che:

1. Giovanni Biagioli conosce personalmente A;
2. A conosce personalmente B;
3. B conosce personalmente C;
4. C conosce personalmente D;

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

Esempio. Prendiamo il dottor Giovanni Biagioli, di Pistoia, e la principessa Aiko, appartenente alla famiglia imperiale del Giappone. Secondo la teoria esistono cinque persone, A, B, C, D, E, tali che:

1. Giovanni Biagioli conosce personalmente A;
2. A conosce personalmente B;
3. B conosce personalmente C;
4. C conosce personalmente D;
5. D conosce personalmente E;

La teoria dei sei gradi di separazione

È una teoria sociologica proposta da *Frigyes Karinthy* nel 1929, secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso non più di 6 collegamenti.

Esempio. Prendiamo il dottor Giovanni Biagioli, di Pistoia, e la principessa Aiko, appartenente alla famiglia imperiale del Giappone. Secondo la teoria esistono cinque persone, A, B, C, D, E, tali che:

1. Giovanni Biagioli conosce personalmente A;
2. A conosce personalmente B;
3. B conosce personalmente C;
4. C conosce personalmente D;
5. D conosce personalmente E;
6. E conosce personalmente la principessa Aiko.

Ambientazioni diverse

Ambientazioni diverse

Da lunedì a venerdì, alle sei del pomeriggio, va in onda su RadioTre la trasmissione “Sei gradi”, in cui la teoria viene applicata ai brani musicali.

Ambientazioni diverse

Da lunedì a venerdì, alle sei del pomeriggio, va in onda su RadioTre la trasmissione "Sei gradi", in cui la teoria viene applicata ai brani musicali. Ecco la scaletta del 9 dicembre 2014: da **Elgar** agli **Oasis**.

Ambientazioni diverse

Da lunedì a venerdì, alle sei del pomeriggio, va in onda su RadioTre la trasmissione “Sei gradi”, in cui la teoria viene applicata ai brani musicali. Ecco la scaletta del 9 dicembre 2014: da **Elgar** agli **Oasis**.

1. Edward Elgar, *Concerto per violoncello e orchestra, op. 85*;
2. Thelonious Monk, *Epistrophy*;
3. John Lee Hooker, *Queen Bee*;
4. Kingstonians, *Sufferer*;
5. Yoko Ono, *Goodbye Sadness*;
6. Co’sang, *Fuje Tanno*;
7. Oasis, *(Don’t look) back in Anger*.

Un itinerario tra le curve

Un itinerario tra le curve

Questa sera adatteremo la teoria agli oggetti della matematica, collegando tra loro due curve: l'**elica cilindrica** e la curva frattale chiamata **fiocco di neve**.

Un itinerario tra le curve

Questa sera adatteremo la teoria agli oggetti della matematica, collegando tra loro due curve: l'**elica cilindrica** e la curva frattale chiamata **fiocco di neve**. Ogni grado sarà anch'esso costituito da una curva.

Un itinerario tra le curve

Questa sera adatteremo la teoria agli oggetti della matematica, collegando tra loro due curve: l'**elica cilindrica** e la curva frattale chiamata **fiocco di neve**. Ogni grado sarà anch'esso costituito da una curva.

In questo modo percorreremo un itinerario tra sette curve della matematica, più o meno celebri.

Il problema della lumaca

Il problema della lumaca

Una lumaca si trova sul tronco di un albero, nel punto A, e deve spostarsi nel punto B del tronco che si trova dalla parte diametralmente opposta del tronco, un po' più in alto.

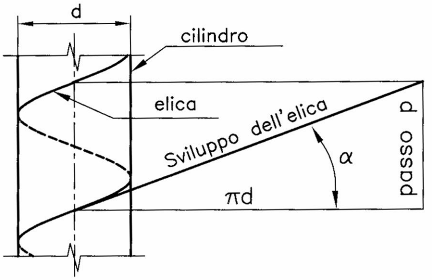
Il problema della lumaca

Una lumaca si trova sul tronco di un albero, nel punto A, e deve spostarsi nel punto B del tronco che si trova dalla parte diametralmente opposta del tronco, un po' più in alto.

Come si fa a determinare il tragitto di lunghezza minima che porta la lumaca da A a B, e a calcolarne la lunghezza?

Elica circolare, o cilindrica

Un' **elica circolare** *è una curva nello spazio, rappresentata da una linea che si avvolge con pendenza costante attorno ad un cilindro circolare retto.*



Le geodetiche del cilindro

Le geodetiche del cilindro

Le eliche cilindriche sono *linee geodetiche* del cilindro, ovvero curve di minima distanza.

Le geodetiche del cilindro

Le eliche cilindriche sono *linee geodetiche* del cilindro, ovvero curve di minima distanza.

Sono geodetiche del cilindro anche le direttrici (segmenti verticali) e i meridiani (archi di circonferenza).

Le geodetiche del cilindro

Le eliche cilindriche sono *linee geodetiche* del cilindro, ovvero curve di minima distanza.

Sono geodetiche del cilindro anche le direttrici (segmenti verticali) e i meridiani (archi di circonferenza).

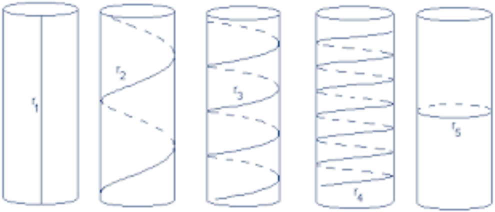


Fig. 2

Primo grado di separazione

Il nostro primo collegamento è dato dalla lumaca.
Dall'elica cilindrica, che risolve il problema della lumaca, passiamo alla **cardioide** *che appartiene alla famiglia dei limaçons (chiocciole) di Pascal.*

I limaçons

I limaçons

Per costruire una di queste curve si considera una circonferenza base $\mathcal{C}$ e un punto fissato P.

I limaçons

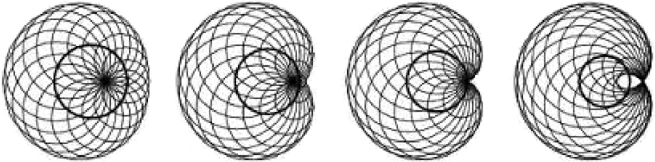
Per costruire una di queste curve si considera una circonferenza base $\mathcal{C}$ e un punto fissato P. Si tracciano tutte le circonferenze con centro su $\mathcal{C}$ passanti per P.

Il loro insieme individua una nuova curva, che ne è l'*inviluppo*, detta limaçon o *chiocciola di Pascal* (si tratta di Etienne Pascal, 1588-1651, padre di Blaise).

I limaçons

Per costruire una di queste curve si considera una circonferenza base $\mathcal{C}$ e un punto fissato P. Si tracciano tutte le circonferenze con centro su $\mathcal{C}$ passanti per P.

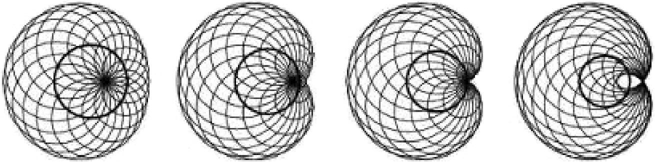
Il loro insieme individua una nuova curva, che ne è l'*inviluppo*, detta limaçon o *chiocciola di Pascal* (si tratta di Etienne Pascal, 1588-1651, padre di Blaise).



I limaçons

Per costruire una di queste curve si considera una circonferenza base $\mathcal{C}$ e un punto fissato P. Si tracciano tutte le circonferenze con centro su $\mathcal{C}$ passanti per P.

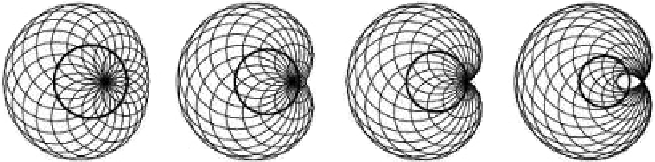
Il loro insieme individua una nuova curva, che ne è l'*inviluppo*, detta limaçon o *chiocciola di Pascal* (si tratta di Etienne Pascal, 1588-1651, padre di Blaise).



Se il punto P sta sulla circonferenza base $\mathcal{C}$ si ha una **cardioide** (la terza figura da sinistra).

Ancora sui limaçons

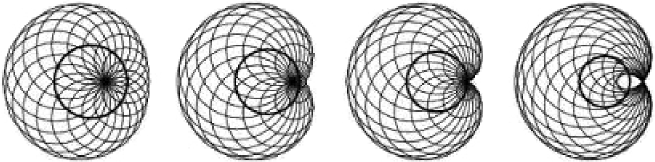
Ancora sui limaçons



L'equazione cartesiana di queste curve è

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad (a \text{ e } b \text{ sono due parametri}).$$

Ancora sui limaçons

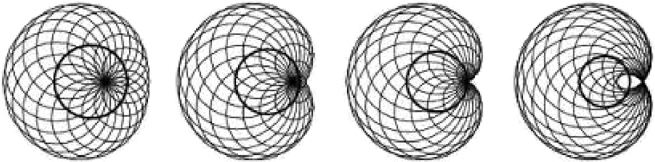


L'equazione cartesiana di queste curve è

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad (a \text{ e } b \text{ sono due parametri}).$$

Si tratta dunque di curve algebriche del quarto ordine.

Ancora sui limaçons



L'equazione cartesiana di queste curve è

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad (a \text{ e } b \text{ sono due parametri}).$$

Si tratta dunque di curve algebriche del quarto ordine. La cardioide si ottiene per $a = b$ (es. $= 1$):

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2.$$

Caratterizzazioni della cardioide

Caratterizzazioni della cardioide

La cardioide si può ottenere in vari altri modi:

Caratterizzazioni della cardioide

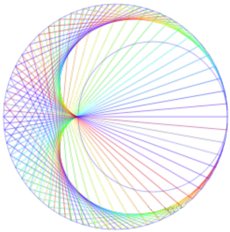
La cardioide si può ottenere in vari altri modi:

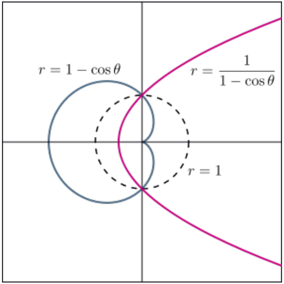
- come **epicicloide** (vi ricordate lo Spirograph?);

Caratterizzazioni della cardioide

La cardioide si può ottenere in vari altri modi:

- come **epicicloide** (vi ricordate lo Spirograph?);
- come **caustica** di una circonferenza;
- attraverso l'operazione di inversione circolare, a partire da una parabola.

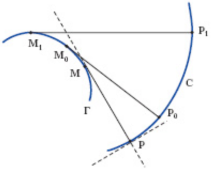




La cardioide è l'evoluta di se stessa

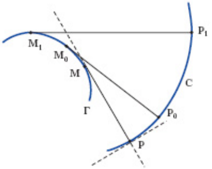
La cardioide è l'evoluta di se stessa

L'**evoluta** di una curva è l'inviluppo della famiglia delle rette normali alla curva.

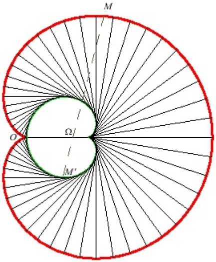


La cardioide è l'evoluta di se stessa

L'**evoluta** di una curva è l'inviluppo della famiglia delle rette normali alla curva.



L'evoluta di una cardioide è essa stessa una cardioide, ridotta di un fattore $1/3$ e ruotata di un angolo π.



La cardioïde est homothétique de sa développée.

Secondo grado di separazione

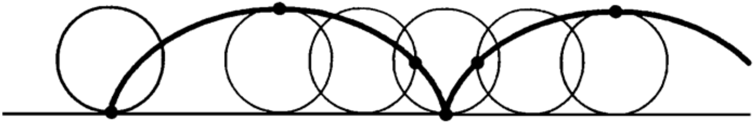
La cardiode appartiene alla famiglia delle epicicloidi.
Queste curve nascono come variazioni della **cicloide**

Cicloide

La **cicloide** (dal greco: *fatto da un cerchio*) è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza (di raggio r) che rotola senza strisciare lungo una retta.

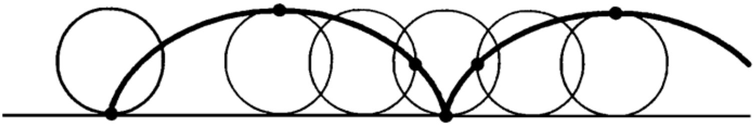
Cicloide

La **cicloide** (dal greco: *fatto da un cerchio*) è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza (di raggio r) che rotola senza strisciare lungo una retta.



Cicloide

La **cicloide** (dal greco: *fatto da un cerchio*) è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza (di raggio r) che rotola senza strisciare lungo una retta.

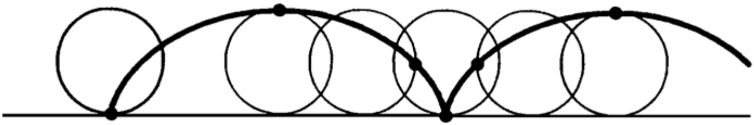


Le equazioni che descrivono la posizione del punto che si muove sulla cicloide al variare del tempo t sono:

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t), \\ y(t) = r(1 - \cos t). \end{cases}$$

Cicloide

La **cicloide** (dal greco: *fatto da un cerchio*) è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza (di raggio r) che rotola senza strisciare lungo una retta.



Le equazioni che descrivono la posizione del punto che si muove sulla cicloide al variare del tempo t sono:

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t), \\ y(t) = r(1 - \cos t). \end{cases}$$

L'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 2\pi$ corrisponde ad un giro completo della ruota.

Il problema della brachistocrona

Il problema della brachistocrona

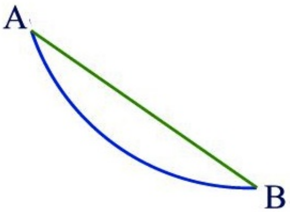
Il punto A si trova a due metri da terra mentre il punto B è a terra. A e B non sono sulla stessa verticale.

Il problema della brachistocrona

Il punto A si trova a due metri da terra mentre il punto B è a terra. A e B non sono sulla stessa verticale. Costruire una guida che vada da A a B in modo che una pallina, rotolando senza attrito su di essa, impieghi il minor tempo possibile ad andare da A a B.

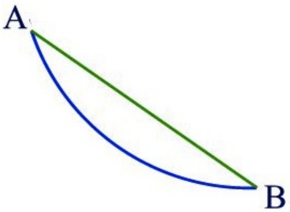
Il problema della brachistocrona

Il punto A si trova a due metri da terra mentre il punto B è a terra. A e B non sono sulla stessa verticale. Costruire una guida che vada da A a B in modo che una pallina, rotolando senza attrito su di essa, impieghi il minor tempo possibile ad andare da A a B.



Il problema della brachistocrona

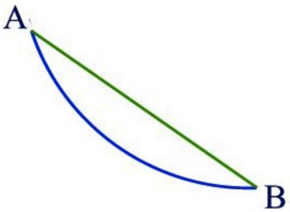
Il punto A si trova a due metri da terra mentre il punto B è a terra. A e B non sono sulla stessa verticale. Costruire una guida che vada da A a B in modo che una pallina, rotolando senza attrito su di essa, impieghi il minor tempo possibile ad andare da A a B.



L'intuito suggerisce di fare la guida dritta, ovvero che la soluzione sia di far rotolare la pallina lungo un piano inclinato che va da A a B.

Il problema della brachistocrona

Il punto A si trova a due metri da terra mentre il punto B è a terra. A e B non sono sulla stessa verticale. Costruire una guida che vada da A a B in modo che una pallina, rotolando senza attrito su di essa, impieghi il minor tempo possibile ad andare da A a B.



L'intuito suggerisce di fare la guida dritta, ovvero che la soluzione sia di far rotolare la pallina lungo un piano inclinato che va da A a B. In questo caso l'intuito sbaglia.

La soluzione

Il problema della brachistocrona fu posto da **Jean Bernoulli** nel 1696.

La soluzione

Il problema della brachistocrona fu posto da **Jean Bernoulli** nel 1696. La sua risoluzione (dell'anno successivo) vide i contributi di: **Leibniz**, **Newton**, **de l'Hôpital**, e soprattutto del fratello maggiore di Jean, **Jakob Bernoulli**.

La soluzione

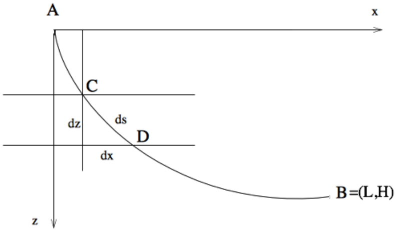
Il problema della brachistocrona fu posto da **Jean Bernoulli** nel 1696. La sua risoluzione (dell'anno successivo) vide i contributi di: **Leibniz**, **Newton**, **de l'Hôpital**, e soprattutto del fratello maggiore di Jean, **Jakob Bernoulli**.

Teorema. *Dati due punti A e B, con B posto a quota inferiore rispetto ad A, la curva che congiunge A e B, sulla quale un punto, cadendo liberamente sotto l'azione della forza peso, passa da A a B nel minor tempo possibile, è un arco di cicloide (capovolta!) con vertice in A.*

La soluzione

Il problema della brachistocrona fu posto da **Jean Bernoulli** nel 1696. La sua risoluzione (dell'anno successivo) vide i contributi di: **Leibniz**, **Newton**, **de l'Hôpital**, e soprattutto del fratello maggiore di Jean, **Jakob Bernoulli**.

Teorema. *Dati due punti A e B, con B posto a quota inferiore rispetto ad A, la curva che congiunge A e B, sulla quale un punto, cadendo liberamente sotto l'azione della forza peso, passa da A a B nel minor tempo possibile, è un arco di cicloide (capovolta!) con vertice in A.*



Dal teorema all'esperimento

Dal teorema all’esperimento

Per rendere tangibile il fatto che la cicloide, e non il segmento, sia la soluzione del problema, sono state realizzate varie macchine che permettono di verificare sperimentalmente il fatto che una pallina scendendo lungo una guida a forma di cicloide impiega meno tempo di una che scende lungo una guida rettilinea.

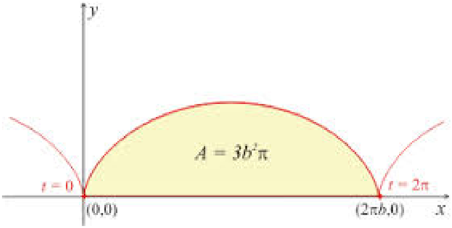
Dal teorema all'esperimento

Per rendere tangibile il fatto che la cicloide, e non il segmento, sia la soluzione del problema, sono state realizzate varie macchine che permettono di verificare sperimentalmente il fatto che una pallina scendendo lungo una guida a forma di cicloide impiega meno tempo di una che scende lungo una guida rettilinea.

Galileo e l'area della cicloide

Galileo e l'area della cicloide

"Quella linea arcuata sono più di cinquant'anni che mi venne in mente di descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che le descrive; ma non fu così, benché la diferenza non sia molta."
[Galileo, 1640]



Terzo grado di separazione

Il nostro terzo passaggio, che ci porta dalla cicloide alla **catenaria***, trova la sua giustificazione in una caratteristica che accomuna le due curve: fornire la soluzione di un problema di minimo.*

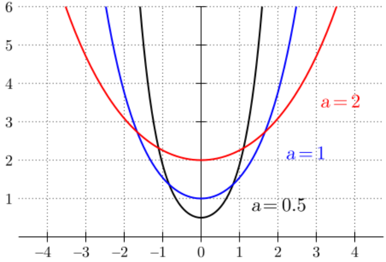
La catenaria

La catenaria

La **catenaria**, *detta anche curva funicolare o velaria, è la curva secondo cui si dispone una fune omogenea, flessibile e inestensibile, appesa a due punti estremi, che sia lasciata pendere soggetta soltanto al proprio peso.*

La catenaria

La **catenaria***, detta anche curva funicolare o velaria, è la curva secondo cui si dispone una fune omogenea, flessibile e inestensibile, appesa a due punti estremi, che sia lasciata pendere soggetta soltanto al proprio peso.*



Se ne occuparono...

- **Galileo** nel 1638 per primo tentò di studiare la curva di sospensione di una catenella flessibile, concludendo erroneamente che si trattasse di una parabola.

Se ne occuparono...

- **Galileo** nel 1638 per primo tentò di studiare la curva di sospensione di una catenella flessibile, concludendo erroneamente che si trattasse di una parabola.
- **Huygens**, insieme a **Leibniz** e ai fratelli **Bernoulli**, dimostrò invece che tale curva era una curva non algebrica.

Se ne occuparono...

- **Galileo** nel 1638 per primo tentò di studiare la curva di sospensione di una catenella flessibile, concludendo erroneamente che si trattasse di una parabola.
- **Huygens**, insieme a **Leibniz** e ai fratelli **Bernoulli**, dimostrò invece che tale curva era una curva non algebrica.

La sua equazione è:

$$y = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

dove a è una costante che rappresenta la distanza dal “terreno”.

Se ne occuparono...

- **Galileo** nel 1638 per primo tentò di studiare la curva di sospensione di una catenella flessibile, concludendo erroneamente che si trattasse di una parabola.
- **Huygens**, insieme a **Leibniz** e ai fratelli **Bernoulli**, dimostrò invece che tale curva era una curva non algebrica.

La sua equazione è:

$$y = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

dove a è una costante che rappresenta la distanza dal "terreno". Si tratta dunque di un arco del grafico del coseno iperbolico.

In architettura

L'**arco catenario** è detto anche *arco equilibrato*. Le strutture realizzate secondo questa curva subiscono soltanto sforzi a trazione, come le funi di sostegno nei ponti sospesi, o a compressione, quando la struttura realizzata ha la forma di una catenaria rovesciata, come nelle cupole o nelle arcate dei ponti.

Il *Gateway Arch*, nel Missouri

La cupola di Brunelleschi

Il problema del tappezziere

Il problema del tappezziere

Nello spazio, si considerano due circonferenze dello stesso raggio, poste in piani paralleli, e coassiali.

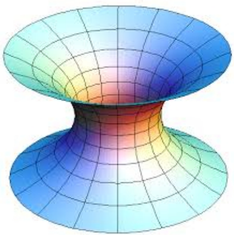
Il problema del tappezziere

Nello spazio, si considerano due circonferenze dello stesso raggio, poste in piani paralleli, e coassiali. Tra tutte le superfici che poggiano su queste circonferenze, trovare quella che ha area minima.

Il problema del tappezziere

Nello spazio, si considerano due circonferenze dello stesso raggio, poste in piani paralleli, e coassiali. Tra tutte le superfici che poggiano su queste circonferenze, trovare quella che ha area minima.

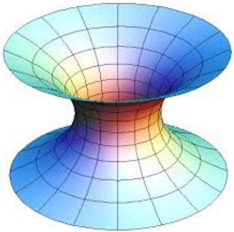
La soluzione non è data, come forse si potrebbe pensare, dalla superficie cilindrica, bensì dalla superficie di rotazione generata da una opportuna catenaria (**Eulero**, 1744), detta *catenoide*.

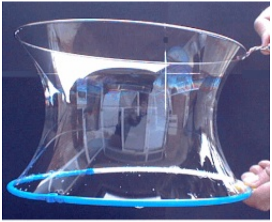


Il problema del tappezziere

Nello spazio, si considerano due circonferenze dello stesso raggio, poste in piani paralleli, e coassiali. Tra tutte le superfici che poggiano su queste circonferenze, trovare quella che ha area minima.

La soluzione non è data, come forse si potrebbe pensare, dalla superficie cilindrica, bensì dalla superficie di rotazione generata da una opportuna catenaria (**Eulero**, 1744), detta *catenoide*.





Superfici di area minima

Superfici di area minima

Il problema di determinare superfici di area minima con condizioni assegnate, di cui l'esempio appena visto è storicamente il primo caso, è stato costantemente oggetto di studio, dal catenoide ai giorni nostri.

Superfici di area minima

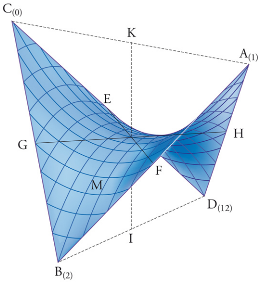
Il problema di determinare superfici di area minima con condizioni assegnate, di cui l'esempio appena visto è storicamente il primo caso, è stato costantemente oggetto di studio, dal catenoide ai giorni nostri.

- **Il problema di Plateau.** *Determinare la superficie di area minima che si appoggia su una curva data nello spazio.*

Superfici di area minima

Il problema di determinare superfici di area minima con condizioni assegnate, di cui l'esempio appena visto è storicamente il primo caso, è stato costantemente oggetto di studio, dal catenoide ai giorni nostri.

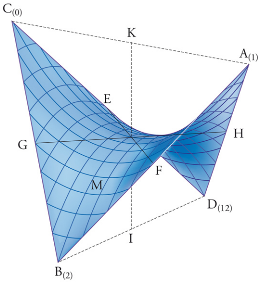
- **Il problema di Plateau.** *Determinare la superficie di area minima che si appoggia su una curva data nello spazio.*



Superfici di area minima

Il problema di determinare superfici di area minima con condizioni assegnate, di cui l'esempio appena visto è storicamente il primo caso, è stato costantemente oggetto di studio, dal catenoide ai giorni nostri.

- **Il problema di Plateau.** *Determinare la superficie di area minima che si appoggia su una curva data nello spazio.*

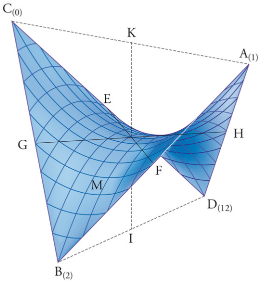


- **Il problema isoperimetrico.** *Determinare la superficie di area minima che racchiude un volume assegnato.*

Superfici di area minima

Il problema di determinare superfici di area minima con condizioni assegnate, di cui l'esempio appena visto è storicamente il primo caso, è stato costantemente oggetto di studio, dal catenoide ai giorni nostri.

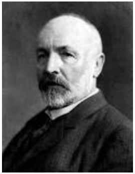
- **Il problema di Plateau.** *Determinare la superficie di area minima che si appoggia su una curva data nello spazio.*



- **Il problema isoperimetrico.** *Determinare la superficie di area minima che racchiude un volume assegnato.* In questo caso, come è noto, la soluzione è data dalla sfera.

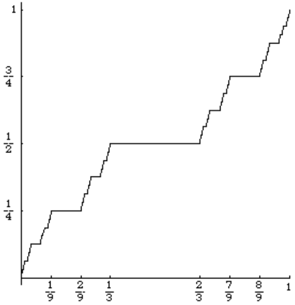
Quarto grado di separazione

Eulero, che dimostrò che il catenoide è una superficie minima, muore nel 1783 a **San Pietroburgo***, città che meno di un secolo dopo darà i natali a Cantor, matematico da cui prende il nome la* **scala di Cantor** *o* **scala del diavolo***.*

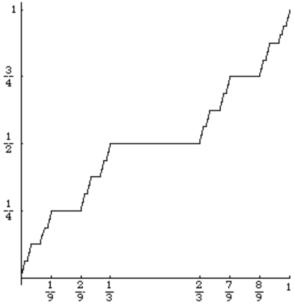


La scala di Cantor

La scala di Cantor

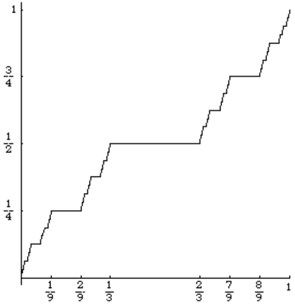


La scala di Cantor



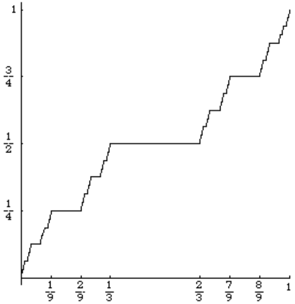
La scala di Cantor è il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$.

La scala di Cantor



La scala di Cantor è il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$. Le sue peculiarità sono:

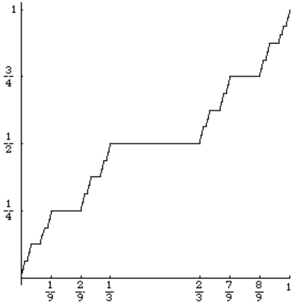
La scala di Cantor



La scala di Cantor è il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$. Le sue peculiarità sono:

- f è **continua**;

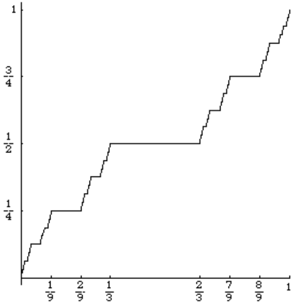
La scala di Cantor



La scala di Cantor è il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$. Le sue peculiarità sono:

- f è **continua**;
- f è **crescente**, e passa dal valore $0 = f(0)$ al valore $1 = f(1)$;

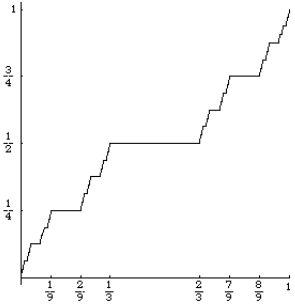
La scala di Cantor



La scala di Cantor è il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$. Le sue peculiarità sono:

- f è **continua**;
- f è **crescente**, e passa dal valore $0 = f(0)$ al valore $1 = f(1)$;
- f è **derivabile quasi ovunque**;

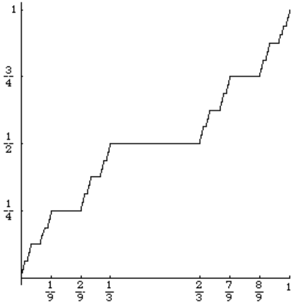
La scala di Cantor



La scala di Cantor è il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$. Le sue peculiarità sono:

- f è **continua**;
- f è **crescente**, e passa dal valore $0 = f(0)$ al valore $1 = f(1)$;
- f è **derivabile quasi ovunque**;
- ovunque f sia derivabile, ha **derivata nulla**.

La scala di Cantor



La scala di Cantor è il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$. Le sue peculiarità sono:

- f è **continua**;
- f è **crescente**, e passa dal valore $0 = f(0)$ al valore $1 = f(1)$;
- f è **derivabile quasi ovunque**;
- ovunque f sia derivabile, ha **derivata nulla**.

Si potrebbe concludere che f cresce "quando nessuno se ne accorge".

La polvere di Cantor

La polvere di Cantor

L'insieme C dei punti in cui la scala di Cantor non è derivabile è chiamato insieme (o polvere) di Cantor.

La polvere di Cantor

L'insieme C dei punti in cui la scala di Cantor non è derivabile è chiamato insieme (o polvere) di Cantor.

La polvere di Cantor

L'insieme C dei punti in cui la scala di Cantor non è derivabile è chiamato insieme (o polvere) di Cantor.

C si distingue per le seguenti proprietà:

La polvere di Cantor

L'insieme C dei punti in cui la scala di Cantor non è derivabile è chiamato insieme (o polvere) di Cantor.

C si distingue per le seguenti proprietà:

- C ha misura 1-dimensionale (lunghezza) nulla,

La polvere di Cantor

L'insieme C dei punti in cui la scala di Cantor non è derivabile è chiamato insieme (o polvere) di Cantor.

C si distingue per le seguenti proprietà:

- C ha misura 1-dimensionale (lunghezza) nulla,
- tuttavia **ha la potenza del continuo**, ovvero può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali (in particolare non è numerabile).

La polvere di Cantor

L'insieme C dei punti in cui la scala di Cantor non è derivabile è chiamato insieme (o polvere) di Cantor.

C si distingue per le seguenti proprietà:

- C ha misura 1-dimensionale (lunghezza) nulla,
- tuttavia **ha la potenza del continuo**, ovvero può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali (in particolare non è numerabile).

Se rappresentiamo un generico $x \in [0, 1]$ in base tre:

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots$$

La polvere di Cantor

L'insieme C dei punti in cui la scala di Cantor non è derivabile è chiamato insieme (o polvere) di Cantor.

C si distingue per le seguenti proprietà:

- C ha misura 1-dimensionale (lunghezza) nulla,
- tuttavia **ha la potenza del continuo**, ovvero può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali (in particolare non è numerabile).

Se rappresentiamo un generico $x \in [0, 1]$ in base tre:

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} \quad (c_i \in \{0, 1, 2\})$$

La polvere di Cantor

L'insieme C dei punti in cui la scala di Cantor non è derivabile è chiamato insieme (o polvere) di Cantor.

C si distingue per le seguenti proprietà:

- C ha misura 1-dimensionale (lunghezza) nulla,
- tuttavia **ha la potenza del continuo**, ovvero può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali (in particolare non è numerabile).

Se rappresentiamo un generico $x \in [0,1]$ in base tre:

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} \quad (c_i \in \{0,1,2\})$$

vediamo che C è formato dai punti x la cui rappresentazione **non contiene alcuna cifra 1**.

Quinto grado di separazione

Dalla scala di Cantor alla **curva di Peano**.
Entrambe queste curve utilizzano la rappresentazione ternaria dei numeri reali.

La curva di Peano

La curva di Peano

Nel 1890 il matematico **Giuseppe Peano** pubblicò l'articolo *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*.

La curva di Peano

Nel 1890 il matematico **Giuseppe Peano** pubblicò l'articolo *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*.
[Solo un anno prima aveva pubblicato il lavoro *Artihmetices principia, nova methodo exposita*, in cui compaiono quelli che sono oggi noti come gli assiomi di Peano dei numeri naturali.]

La curva di Peano

Nel 1890 il matematico **Giuseppe Peano** pubblicò l'articolo *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*.
[Solo un anno prima aveva pubblicato il lavoro *Artihmetices principia, nova methodo exposita*, in cui compaiono quelli che sono oggi noti come gli assiomi di Peano dei numeri naturali.]

Quella di Peano è una curva che "ricopre" interamente un quadrato.

La curva di Peano

Nel 1890 il matematico **Giuseppe Peano** pubblicò l'articolo *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*.
[Solo un anno prima aveva pubblicato il lavoro *Artihmetices principia, nova methodo exposita*, in cui compaiono quelli che sono oggi noti come gli assiomi di Peano dei numeri naturali.]

Quella di Peano è una curva che “ricopre” interamente un quadrato.

In linguaggio tecnico: *è una funzione continua e* **suriettiva** *dall'intervallo* $[0,1]$ *al quadrato unitario* $Q = [0,1] \times [0,1]$.

$$t \ \rightarrow \ (x(t), y(t)),$$

$$t \in [0,1].$$

La curva di Peano

Nel 1890 il matematico **Giuseppe Peano** pubblicò l'articolo *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*.
[Solo un anno prima aveva pubblicato il lavoro *Artihmetices principia, nova methodo exposita*, in cui compaiono quelli che sono oggi noti come gli assiomi di Peano dei numeri naturali.]

Quella di Peano è una curva che "ricopre" interamente un quadrato.

In linguaggio tecnico: *è una funzione continua e* **suriettiva** *dall'intervallo* $[0,1]$ *al quadrato unitario* $Q = [0,1] \times [0,1]$.

$$t \to (x(t), y(t)),$$

$$t \in [0,1].$$

Contestualizziamo...

Contestualizziamo...

La fine dell'ottocento si caratterizza per gli studi sulla **cardinalià**.

Contestualizziamo...

La fine dell'ottocento si caratterizza per gli studi sulla **cardinaliă**.
Si formalizzano i concetti di insiemi **finiti** e **infiniti** (Dedekind).

Contestualizziamo...

La fine dell'ottocento si caratterizza per gli studi sulla **cardinalià**.
Si formalizzano i concetti di insiemi **finiti** e **infiniti** (Dedekind).
Si individuano insiemi infiniti di cardinalità diversa: si dimostra la **numerabilità** di $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$, e si prova che $\mathbf{R}$ è **più che numerabile** (Cantor).

Contestualizziamo...

La fine dell'ottocento si caratterizza per gli studi sulla **cardinalià**. Si formalizzano i concetti di insiemi **finiti** e **infiniti** (Dedekind). Si individuano insiemi infiniti di cardinalità diversa: si dimostra la **numerabilità** di $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$, e si prova che $\mathbf{R}$ è **più che numerabile** (Cantor).

- Nel 1878 Cantor costruisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento e quelli di un quadrato,

Contestualizziamo...

La fine dell'ottocento si caratterizza per gli studi sulla **cardinalià**.
Si formalizzano i concetti di insiemi **finiti** e **infiniti** (Dedekind).
Si individuano insiemi infiniti di cardinalità diversa: si dimostra la **numerabilità** di $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$, e si prova che $\mathbf{R}$ è **più che numerabile** (Cantor).

- Nel 1878 Cantor costruisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento e quelli di un quadrato, mostrando in pratica che retta ($\mathbf{R}$) e piano ($\mathbf{R}^2$) hanno la stessa cardinalità.

Contestualizziamo...

La fine dell'ottocento si caratterizza per gli studi sulla **cardinalià**.
Si formalizzano i concetti di insiemi **finiti** e **infiniti** (Dedekind).
Si individuano insiemi infiniti di cardinalità diversa: si dimostra la **numerabilità** di $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$, e si prova che $\mathbf{R}$ è **più che numerabile** (Cantor).

- Nel 1878 Cantor costruisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento e quelli di un quadrato, mostrando in pratica che retta ($\mathbf{R}$) e piano ($\mathbf{R}^2$) hanno la stessa cardinalità.
- Nel '79 si dimostra che nessuna corrispondenza di questo tipo può essere anche continua (E. Netto).

Contestualizziamo...

La fine dell'ottocento si caratterizza per gli studi sulla **cardinalià**.
Si formalizzano i concetti di insiemi **finiti** e **infiniti** (Dedekind).
Si individuano insiemi infiniti di cardinalità diversa: si dimostra la **numerabilità** di $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$, e si prova che $\mathbf{R}$ è **più che numerabile** (Cantor).

- Nel 1878 Cantor costruisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento e quelli di un quadrato, mostrando in pratica che retta ($\mathbf{R}$) e piano ($\mathbf{R}^2$) hanno la stessa cardinalità.
- Nel '79 si dimostra che nessuna corrispondenza di questo tipo può essere anche continua (E. Netto).
- La curva di Peano prova che si può ottenere una funzione dal segmento al quadrato, suriettiva e continua (ma non iniettiva).

Contestualizziamo...

La fine dell'ottocento si caratterizza per gli studi sulla **cardinalià**. Si formalizzano i concetti di insiemi **finiti** e **infiniti** (Dedekind). Si individuano insiemi infiniti di cardinalità diversa: si dimostra la **numerabilità** di $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$, e si prova che $\mathbf{R}$ è **più che numerabile** (Cantor).

- Nel 1878 Cantor costruisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento e quelli di un quadrato, mostrando in pratica che retta ($\mathbf{R}$) e piano ($\mathbf{R}^2$) hanno la stessa cardinalità.
- Nel '79 si dimostra che nessuna corrispondenza di questo tipo può essere anche continua (E. Netto).
- La curva di Peano prova che si può ottenere una funzione dal segmento al quadrato, suriettiva e continua (ma non iniettiva).
- È interessante osservare che presi due punti qualunque della curva di Peano, il tratto di curva che li congiunge **ha lunghezza infinita** (!)

Hilbert ripropone la curva di Peano

Hilbert ripropone la curva di Peano

La costruzione di Peano era interamente analitica. Il suo articolo del 1890 (di sole quattro pagine) non contiene alcuna figura.

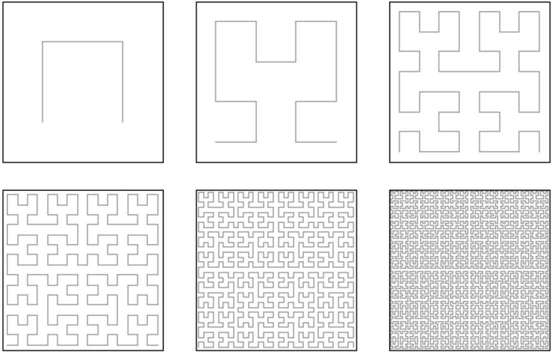
Hilbert ripropone la curva di Peano

La costruzione di Peano era interamente analitica. Il suo articolo del 1890 (di sole quattro pagine) non contiene alcuna figura.

Nel 1891 Hilbert propone una costruzione di curve come quella di Peano, ottenute come limite di opportune poligonali, fornendo cosí una versione più intuitiva dal punto di vista geometrico.

Hilbert ripropone la curva di Peano

La costruzione di Peano era interamente analitica. Il suo articolo del 1890 (di sole quattro pagine) non contiene alcuna figura.
Nel 1891 Hilbert propone una costruzione di curve come quella di Peano, ottenute come limite di opportune poligonali, fornendo cosí una versione più intuitiva dal punto di vista geometrico.



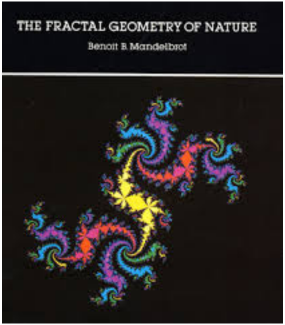
Le poligonali di Hilbert

Sesto grado di separazione

La prossima e ultima curva del nostro percorso è la **curva di Koch**, *o* **fiocco di neve**, *uno degli esempi più noti di frattale.*

Sesto grado di separazione

La prossima e ultima curva del nostro percorso è la **curva di Koch**, *o* **fiocco di neve**, *uno degli esempi più noti di frattale. La curva di Peano e la curva di Koch sono entrambe protagoniste dell'opera The fractal geometry of nature di* **Mandelbrot**.



Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Nello spazio tridimensionale in cui viviamo:

Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Nello spazio tridimensionale in cui viviamo:

- una **retta** è un oggetto **unidimensionale**;

Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Nello spazio tridimensionale in cui viviamo:

- una **retta** è un oggetto **unidimensionale**;
- un **piano** è un oggetto **bidimensionale**;

Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Nello spazio tridimensionale in cui viviamo:

- una **retta** è un oggetto **unidimensionale**;
- un **piano** è un oggetto **bidimensionale**;
- tutto lo spazio è **tridimensionale**;

Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Nello spazio tridimensionale in cui viviamo:

- una **retta** è un oggetto **unidimensionale**;
- un **piano** è un oggetto **bidimensionale**;
- tutto lo spazio è **tridimensionale**;
- (meno intuitivo) un **punto** è un oggetto **zero-dimensionale**.

Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Nello spazio tridimensionale in cui viviamo:

- una **retta** è un oggetto **unidimensionale**;
- un **piano** è un oggetto **bidimensionale**;
- tutto lo spazio è **tridimensionale**;
- (meno intuitivo) un **punto** è un oggetto **zero-dimensionale**.

Gli oggetti geometrici a noi familiari hanno **dimensione intera**.

Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Nello spazio tridimensionale in cui viviamo:

- una **retta** è un oggetto **unidimensionale**;
- un **piano** è un oggetto **bidimensionale**;
- tutto lo spazio è **tridimensionale**;
- (meno intuitivo) un **punto** è un oggetto **zero-dimensionale**.

Gli oggetti geometrici a noi familiari hanno **dimensione intera**.

I **frattali** sono insiemi di dimensione **non-intera**.

Digressione: cos'è un frattale, in due parole

Nello spazio tridimensionale in cui viviamo:

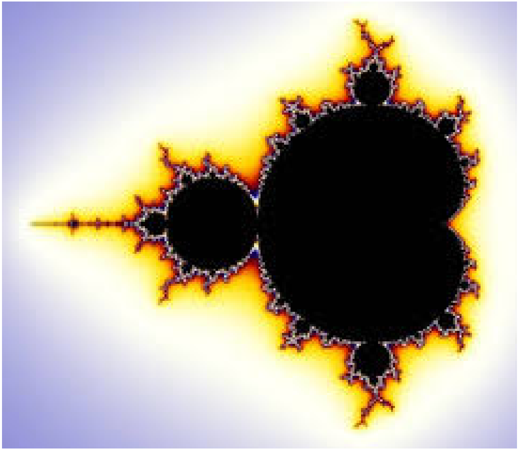
- una **retta** è un oggetto **unidimensionale**;
- un **piano** è un oggetto **bidimensionale**;
- tutto lo spazio è **tridimensionale**;
- (meno intuitivo) un **punto** è un oggetto **zero-dimensionale**.

Gli oggetti geometrici a noi familiari hanno **dimensione intera**.

I **frattali** sono insiemi di dimensione **non-intera**.

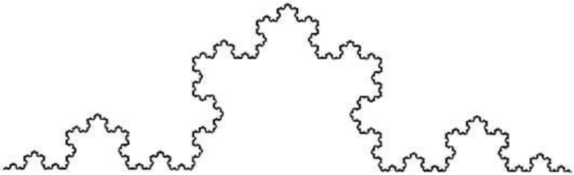
Ad esempio la curva di Koch ha dimensione strettamente compresa tra uno e due; è dunque una via di mezzo tra una curva e una superficie.

L'insieme di Mandelbrot

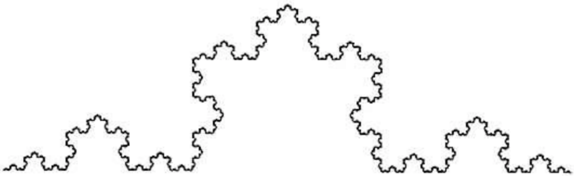


La curva di Koch

La curva di Koch

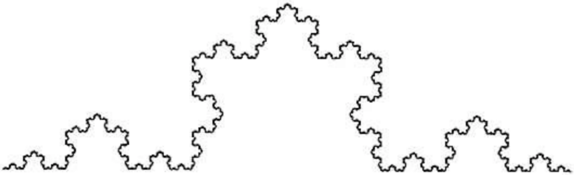


La curva di Koch



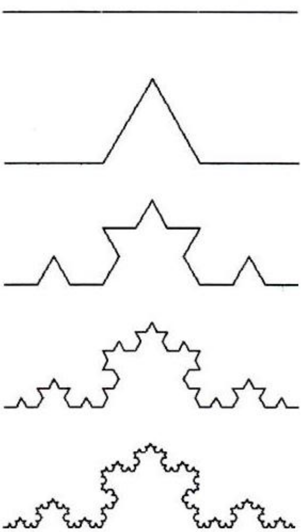
La **curva di Koch** è una delle prime curve frattali di cui si conosca una descrizione. Apparve per la prima volta su un documento del 1904 intitolato *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire* del matematico svedese **Helge von Koch**.

La curva di Koch



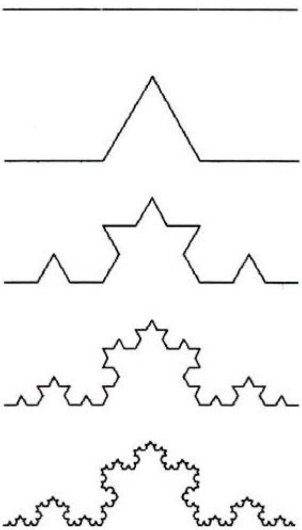
La **curva di Koch** è una delle prime curve frattali di cui si conosca una descrizione. Apparve per la prima volta su un documento del 1904 intitolato *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire* del matematico svedese **Helge von Koch**.
Nel suo libro *The fractal geometry of nature*, **Mandelbrot** dà a questa curva l'appellativo di *teragon* (dal greco *mostro*, *strana creatura*) e la considera come un'approssimazione suggestiva di una linea costiera.

La costruzione



La generazione della curva di Koch avviene grazie all'esecuzione di una *procedura ricorsiva*.

La costruzione



La generazione della curva di Koch avviene grazie all'esecuzione di una *procedura ricorsiva*.

Si può dimostrare (dando un'opportuna definizione di dimensione di un insieme) che la dimensione della curva di Koch è

$$\frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1.2618.$$

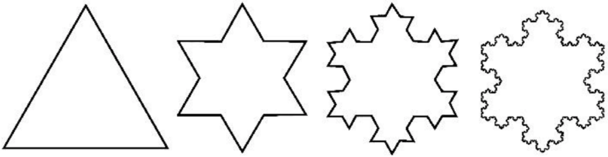
Il fiocco di neve

Il fiocco di neve

Se nel processo di costruzione della curva non si parte da un segmento, ma da un triangolo equilatero, quello che si ottiene è il **fiocco di neve** o **isola di Koch**.

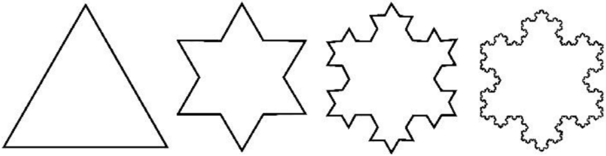
Il fiocco di neve

Se nel processo di costruzione della curva non si parte da un segmento, ma da un triangolo equilatero, quello che si ottiene è il **fiocco di neve** o **isola di Koch**.



Il fiocco di neve

Se nel processo di costruzione della curva non si parte da un segmento, ma da un triangolo equilatero, quello che si ottiene è il **fiocco di neve** o **isola di Koch**.



Una delle caratteristiche della curva di Koch e del fiocco di neve (come di molti altri frattali) è l'**autosimilarità**: ingrandendo un qualsiasi dettaglio si riottiene la figura di partenza.

Le parole di Cesàro

Le parole di Cesàro

È questa similitudine tra il tutto e le sue parti [...] che ci porta a considerare la curva di Koch alla stregua di una linea veramente meravigliosa tra tutte. Se fosse dotata di vita, non sarebbe possibile annientarla al primo colpo, poiché rinascerebbe incessantemente dalle profondità dei suoi triangoli, come la vita nell'universo.