

# L'insegnamento dell'algebra nel Tre-Quattrocento in Italia con particolare riferimento a Firenze

di

Raffaella Franci

## INTRODUZIONE

Per parlare dell'insegnamento dell'algebra in Italia nel Tre-Quattrocento conviene partire da lontano, cioè da Bagdad nella prima metà del nono secolo. E' infatti in questa città, allora fiorente centro della cultura islamica, che tra l'811 e l'833 il matematico e astronomo Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi scrisse un trattato intitolato *Kitab al-jabr wa-l-muqabala* (libro d'algebra e d'almuqabala) considerato il testo fondante della disciplina matematica oggi denominata algebra proprio dal termine al-jabr che compare nel titolo di questo testo.

Il trattato è diviso in tre parti:

nella prima si presentano le risoluzioni delle equazioni algebriche di primo e secondo grado, elementi di calcolo algebrico e una trentina di problemi risolti con l'algebra,

nella seconda si risolvono alcuni problemi mercantili con la regola del tre,

la terza è dedicata alla risoluzione di problemi di ripartizione di eredità.

La parte che più direttamente ci interessa è la prima in quanto contiene i fondamenti della teoria delle equazioni e che in seguito citeremo semplicemente come *Algebra*.

Al-Khwarizmi esordisce osservando che in aritmetica per fare i calcoli si usano i numeri mentre

... i numeri che sono richiesti nel calcolare per al-jabr e al-muqabala sono di tre generi, precisamente radici, quadrati e numeri semplici che non sono in relazione né con radice né con quadrato .

Nello specchietto sottostante presentiamo le denominazioni originali arabe assieme alle loro traduzioni in latino, volgare italiano e simbolismo moderno.

shay o jidr	res o radix	cosa o radice	$x$
mal	census o quadratus	censo o quadrato	$x^2$
dirham	numerus	numero	a,b,c

L'autore prosegue osservando che

...un numero appartenente a una delle tre classi può essere uguale a un numero di un'altra classe. Puoi dire ad esempio:

1. I censi sono uguali a cose  $\langle ax^2 = bx \rangle$
2. I censi sono uguali a numeri  $\langle ax^2 = b \rangle$
3. Le cose sono uguali a numeri  $\langle ax = b \rangle$

Per ciascun caso vengono presentate le regole risolutive mediante la loro applicazione a semplici esempi numerici.

Esauriti questi casi al-Khwarizmi ne presenta altri tre

... le radici, i quadrati e i numeri possono essere combinati insieme e quindi si creano tre nuovi generi composti, cioè

4. Quadrati e radici uguali a numeri  $\langle ax^2 + bx = c \rangle$
5. Quadrati e numeri uguali a radici  $\langle x^2 + c = bx \rangle$
6. Radici e numeri uguali a quadrati  $\langle bx + c = ax^2 \rangle$ .

Anche in questo caso vengono presentate le regole risolutive mediante la loro applicazione a esempi numerici.

A questo punto è opportuno notare che nel testo arabo tutti i procedimenti matematici sono spiegati a parole non c'è alcuna traccia di simbolismo aritmetico e algebrico, spesso anche i numeri sono scritti a parole. Questa caratteristica, che gli storici della matematica denominano *algebra retorica*, sarà conservata per circa ottocento anni.

La considerazione di tre casi distinti per le equazioni di secondo grado deriva dal fatto che all'epoca si consideravano solo numeri positivi e che lo zero non era considerato un numero. A questo proposito va notato che i coefficienti che, nella nostra trascrizione in simbolismo moderno, abbiamo indicato con  $a, b, c$  sono numeri interi o razionali positivi. Anche le soluzioni che venivano calcolate, eventualmente anche irrazionali, erano solo quelle strettamente positive. Le soluzioni presentate per i primi tre casi sono nell'ordine:

$$x = b/a, \quad x = \sqrt{b/a}, \quad x = b/a.$$

Notiamo che, coerentemente a quanto sopra osservato, l'autore non presenta la soluzione nulla nel primo caso e quella negativa nel secondo. Le soluzioni proposte per i tre casi composti, scritte nel simbolismo moderno, sono nell'ordine

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{2a}} - \frac{b}{2a}; \quad x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{2a}}; \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{2a}} + \frac{b}{2a},$$

anche in questi casi vengono calcolate solo le soluzioni positive. Relativamente al caso 5 l'autore osserva che vi sono due soluzioni solo quando  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 > \frac{c}{2a}$ , solo una in caso di uguaglianza e nessuna altrimenti.

Il trattato prosegue con la presentazione di dimostrazioni geometriche per le soluzioni delle equazioni composte e di alcune regole per calcolare con monomi e polinomi in  $x$  e  $x^2$ . Infine vengono proposti e completamente risolti trentaquattro semplici problemi di tipo astratto, cioè del genere: “trova un numero tale che ...”, “dividi 10 in due parti tali che ...”, etc.. Un così largo spazio dato alla risoluzione di problemi è coerente con la circostanza che per al-Khwarizmi come per tutti gli algebristi successivi l'algebra è uno strumento per risolvere problemi. Ed è proprio quando si applica a questo scopo che intervengono le operazioni di al-jabr e al-muqabala. Quando si risolve un problema, infatti, quasi mai si arriva a una equazione in una delle forme canoniche presentate, allora bisogna operare in modo da ridurle ad esse mediante l'uso delle operazioni suddette.

Al-jabr consiste nel portare una quantità sottratta da un lato di una equazione all'altro rendendola positiva, per esempio

$$7x+2=5-2x \text{ diventa } 9x+2=5; \quad 8x-3=2+x \text{ diventa } 8x=5+x.$$

Al-muqabala consiste nel sostituire due termini dello stesso tipo ma su lati differenti di un'equazione con la loro differenza sul lato dove c'è il termine maggiore, per esempio

$$9x+2=5 \text{ diventa } 9x=3; \quad 8x+2=5+x \text{ diventa } 7x=3.$$

Presentiamo ora una traduzione in italiano, accompagnata da una traduzione nel simbolismo moderno, di un problema tratto dall' *Algebra*

<p>Se l'esempio fosse: Un numero un terzo del quale e un dirham moltiplicati per un quarto dello stesso numero e due dirham, restituisce il numero con l'aggiunta di tredici dirham. Allora il calcolo è questo: moltiplica un terzo di una cosa per un quarto di una cosa, questo da un mezzo di un sesto di un quadrato; moltiplica due dirham per un terzo di una cosa, questo da due terzi di una radice; un dirham per un quarto di una cosa da un quarto di una radice; e un dirham per due dirham da due dirham.</p> <p>Questo tutto insieme è un dodicesimo di un quadrato e due dirham e undici dodicesimi di una cosa uguale a una cosa e tredici dirham. Togli ora due dirham dai tredici a causa degli altri due dirham, il resto è undici dirham. Togli quindi gli undici dodicesimi di una radice da una radice ci rimangono un dodicesimo di una radice e undici dirham uguali a un dodicesimo di un quadrato.</p> <p>Completa il quadrato, cioè moltiplicalo per dodici, e fai lo stesso con tutto ciò che hai. Il prodotto è un quadrato che è uguale a cento trenta due dirham e una radice. Riduci questo nel modo che ti ho insegnato e sarà giusto.</p>	<p><u>In simbolismo moderno</u> indicando con <math>x</math> il numero cercato si ha che l'enunciato del problema si traduce nella seguente espressione algebrica</p> $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 2\right) = x + 13$ $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 2\right) = \frac{x^2}{12} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x + 2$ $\frac{1}{12}x^2 + \frac{11}{12}x + 2 = x + 13$ <p>[si applica al-muqabala]</p> $\frac{1}{12}x^2 + \frac{11}{12}x = x + 13 - 2 = x + 11$ <p>[si riapplica al-muqabala]</p> $x^2 = x - \frac{11}{12}x + 11 = \frac{1}{12}x + 11$ $x^2 = 132 + x$ <p>[l'autore rimanda alla regola che in questo caso è la 6]</p>
--	---

Il trattato di al-Khwarizmi ebbe una larga diffusione nel mondo islamico che nel periodo della sua massima espansione andava dalla Persia alla Spagna passando per la Penisola Araba il Nord Africa e la Sicilia. Ed è proprio in Spagna che nella seconda metà del XII secolo alcuni studiosi europei tradussero l'*Algebra* in latino, essi si limitarono però alla sola prima parte, cioè quella algebrica. Ci sono pervenute ben tre di queste traduzioni, la più diffusa fu certamente quella di Gherardo da Cremona.

Un altro importante veicolo di diffusione dell'algebra nel mondo latino fu il *Liber abaci* (1202, 1228) di Leonardo Pisano o Fibonacci che ad essa dedica la parte finale del trattato. La parte teorica della trattazione di Leonardo è modellata sull'*Algebra* di al-Khwarizmi mentre i circa cento problemi sono presi anche da testi arabi posteriori.

A seguito della diffusione del *Liber abaci* verosimilmente prima a Pisa e in Toscana e quindi nel centro e nel nord d'Italia nacquero le scuole d'abaco il cui compito primario è l'insegnamento dell'aritmetica mercantile, cioè l'uso delle cifre indo-arabiche per rappresentare i numeri, della regola del tre e delle sue applicazioni a operazioni commerciali quali il calcolo del prezzo delle merci, di interessi e sconti, di guadagni e perdite di società, cambi di monete, baratti etc.<sup>1</sup>.

Verosimilmente poiché l'algebra è presente con un lungo capitolo nel *Liber abaci* essa venne coltivata e insegnata nell'ambito delle scuole d'abaco, che a partire dalla fine del XIII secolo erano attive nelle principali città italiane. Tuttavia l'algebra pur essendo considerata uno strumento molto versatile per risolvere ogni genere di problemi non faceva parte del curriculum di base, il suo insegnamento, infatti, era riservato agli studenti migliori e in particolare a quanti volessero intraprendere la carriera dell'insegnamento. La sua conoscenza era un ottimo titolo di merito per un maestro d'abaco e serviva per attirare studenti. Le scuole, infatti, nelle città più grandi come Firenze erano private e un maestro doveva conquistarsi gli scolari mostrando le sue abilità e competenze.

Molti maestri d'abaco scrissero trattati nei quali esponevano i contenuti del loro insegnamento, questi testi sono scritti nei volgari delle città alle quali i maestri appartenevano. Ci sono rimasti oltre trecento manoscritti contenenti *trattati d'abaco* risalenti ai secoli XIV e XV e circa un terzo di essi contiene un capitolo d'algebra<sup>2</sup>.

Le più antiche trattazioni dell'algebra nella lingua volgare risalgono al primo trentennio del Trecento e furono compilate da maestri fiorentini. Esse hanno caratteristiche assai diverse dall'*Algebra* di al-Khwarizmi, consistono infatti di

---

<sup>1</sup> Vedi: Raffaella Franci, *Le matematiche dell'abaco*, Lettera pristem, 21, 1996, 23-34.

<sup>2</sup> Vedi: Warren Van Egmond, *Practical Mathematics in the Italian Renaissance. A Catalog of Italian Abacus Manuscripts and Printed Books*, Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze, 1980.

una serie di regole per risolvere equazioni seguite da uno o più problemi talvolta precedute da semplici regole per il calcolo algebrico.

Proponiamo alcune regole seguite dal problema esemplificativo tratte dall'anonimo *Trattato dell'acibra amuchabile* composto verso la metà del XIV secolo da un anonimo maestro toscano probabilmente fiorentino<sup>3</sup>.

**1.** *Quando le cose sono iguali al numero si vuole partire il numero nelle cose e quello che nne viene si è numero e cotanto vale la cosa.*

Ponghoti asenpro alla detta reghola e vo' dire così: fammi di 10 due parti che, partendo la maggiore nella minore ne vengha 100. Dei così fare: che lla prima parte sia una cosa, cioè la maggiore, adunque l'altra è il rimanente insino a 10, che v'à 10 meno una cosa. E così abbiamo posto che ll'una, cioè la maggiore sia una cosa e lla minore sia 10 meno una cosa. Apresso si vuole partire una cosa, ch'è la maggiore, per 10 meno una cosa, ch'è la minore e deve venire 100, e perciò è da multiplichare 100 via 10 meno una cosa fanno 1000 meno 100 cose che s'aguagliano a una cosa. Ristora ciascuna parte, cioè agiungniere 100 cose a ciascuna parte, averai che 101 cose sono iguali a 1000 numeri, adunque si vuole partire il numero delle cose, cioè 1000 in 101, viene 9 e 91/101. E noi ponemo che l'una parte, cioè la maggiore, fosse una cosa, dunque la maggiore è 9 e 91/101 e la minore è il rimagniente fino in 100 che v'à 10/101. E così abiamo che lla maggiore parte di 10 è 9 e 91/101 e la minore 10/101.

\*\*\*    \*\*\*    \*\*\*

**5.** *Quando le cose sono iguali a ciensi e numero si vuole partire ne' ciensi, po dimezare le cose e multiplicare per sé medesimo e chavarne il numero e lla radicie di quello che rimane più il*

$$ax = b \quad x = \frac{b}{a}$$

Si devono trovare due numeri  $u, v$  tali che

$$u+v=10 \quad e \quad u/v=100$$

L'autore pone

$$u=x \quad e \quad v=10-x$$

allora

$$\frac{x}{10-x} = 100$$

quindi

$$x = 100(10-x) = 1000 - 100x$$

$$x+100x= 1000$$

$$101x = 1000$$

$$x = 1000/101 = 9 + 91/101$$

pertanto

$$u = 9+91/101$$

$$v= 100 - (9+91/100)= 10/101$$

\*\*\*    \*\*\*    \*\*\*

$$ax = bx^2 + c$$

$$\frac{a}{b}x = x^2 + \frac{c}{a}$$

<sup>3</sup> Vedi: Anonimo (secXIV), *Trattato dell'acibra amuchabile dal codice Ricc.2263 della Biblioteca Riccardiana di Firenze*, a cura e con introduzione di Annalisa Simi, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale n° 22, Università degli Studi di Siena,

<p><i>dimezzamento delle cose vale la cosa ovvero il dimezzamento delle cose meno la radice di quello che rimane.</i></p> <p>Fammi di 10 due parti che multiprichando la maggiore contro alla minore faccia 20. Adomando quant'è ciaschuna parte.</p> <p>Poni che la minore sia una cosa, dunque la maggiore i' rimanente fino in 10, che v'à 10 meno una cosa. Apresso ti conviene multiprichare la minore, ch'è un cosa, vie la maggiore, ch'è 10 meno una cosa, fa 10 cose meno uno cienso, la quale multiprichatione è iguali a 20. Ristora ciaschuna parte, cioè giungniere uno cienso a ciachuna parte, averai che 10 cose sono iguali a uno cienso e 20 numeri.</p> <p>Recha a uno cienso e poi dimeza le cose, viene 5, multipricha per sé medesimo, fa 25, chavane il numero, cioè 20, rimane 5 del quale piglia la radice, ch'è manifesto che non ha radice. Adunque vale la cosa e cioè il dimezzamento meno la radice di 5. E noi ponemo che l'una parte fosse una cosa, cioè la minore, dunque la minore sia 5 meno radice di 5 e la maggiore i' rimanente fino in 10 che v'à 5 e radice di 5.</p>	$x = \frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 - \frac{c}{a}}$ <p>Si domanda di dividere 10 in due parti <math>u, v</math> tali che <math>uv=20</math></p> <p>L'autore pone la parte minore uguale ad <math>x</math>, quindi la maggiore è <math>10-x</math></p> <p>Multiplica <math>x(10-x)</math> e uguaglia il risultato a 20 ottenendo</p> $10x - x^2 = 20$ <p>E poi</p> $10x = x^2 + 20$ <p>E infine calcola il risultato applicando la relativa regola</p> $x = 5 - \sqrt{25 - 20} = 5 - \sqrt{5}$
---	--

Già le più antiche trattazioni d'algebra in volgare che ci sono pervenute introducono la terza e quarta potenza dell'incognita, denominate rispettivamente *cubo* e *censo di censo*, e presentano oltre alle sei elencate nell'*Algebra* di al-Khwarizmi ulteriori regole relative ad equazioni di grado superiore al secondo, anche per queste si continuano a calcolare solo le soluzioni positive. Per esempio già verso la fine del Trecento alcuni trattati proponevano le seguenti regole dette *le ventidue regole*<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Vedi per esempio: Anonimo(sec.XIV), *Il trattato d'algebra dal ms Fond. Prin. II.V della Biblioteca Nazionale di Firenze*, a cura di R. Franci, L. Pieraccini, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale n°5, Unioversità di Siena, 1988.

- |                          |                          |                          |                   |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|
| 1. $ax = b$              | 2. $ax^2 = b$            | 3. $ax^2 = bx$           |                   |
| 4. $ax^2 + bx = c$       | 5. $bx = ax^2 + c$       | 6. $ax^2 = bx + c$       |                   |
| 7. $ax^3 = b$            | 8. $ax^3 = bx$           | 9. $ax^3 = bx^2$         |                   |
| 10. $ax^3 + bx^2 = cx$   | 11. $bx^2 = ax^3 + cx$   | 12. $ax^3 = bx^2 + cx$   |                   |
| 13. $ax^4 = b$           | 14. $ax^4 = bx$          | 15. $ax^4 = bx^2$        | 16. $ax^4 = bx^3$ |
| 17. $ax^4 + bx^3 = cx^2$ | 18. $cx^3 = ax^4 + bx^2$ | 19. $ax^4 = bx^3 + cx^2$ |                   |
| 20. $ax^4 + bx^2 = c$    | 21. $bx^2 = ax^4 + c$    | 22. $ax^4 = bx^2 + c$    |                   |

**TABELLA 1**

Questi trattati raramente presentano regole per il calcolo algebrico che vengono invece insegnate nel corso della risoluzione dei problemi e sono modellate su quelle aritmetiche, come si può vedere nel seguente esempio tratto anch'esso dal *Trattato dell'acibra amuchabile*.

<p>Uno parti 100 in una quantità e poi parti 100 in più 5 che prima e giunti questi due avvenimenti insieme fecie 20. Vo' sapere in che 100 si parti prima ed in che si parti poscia.</p> <p>Poni che tu partissi 100 in una cosa vienne 100 partito per una cosa. E poi dicie che parti 100 in più 5 che prima dunque ti conviene partire 100 in una cosa e 5 vienne 100 partito per una cosa e 5.</p> <p>Or ài a raggiungere 100 partito per una cosa con 100 partito per una cosa e 5. Ora ti voglio mostrare una simigliante acciò che sia bene avisato di questi raggiungimenti e vo' dire così : io voglio raggiugnere 24 partito per 4 con 24 partito per 6 che vedi che de' fare 10.</p> <p>Dunque poni 24 partito per 4 a modo di uno rotto che nne verràà 24/4. Anche simigliantemente poni 24 partito per 6 a modo di uno rotto.</p> <p>Ora multipricha in crocie, ciè 6 vie 24 fanno 144 ed ora multipricha 4 vie 24 ch'è sopra l 6, fanno 96, giugni con 144 fanno 240. Ora multipricha ciò ch'à sotto le verghe, cioè 4 via 6 fanno 24. Adunque ti conviene partire 240 per 24 che nne dee venire 10. Dicho</p>	<p>L'autore pone la quantità cercata uguale a x per cui considera</p> $100 : x$ <p>e</p> $100 : (x+5)$ <p>Prima di calcolare <math>(100 : x) + (100 : (x+5))</math> fornisce un esempio aritmetico di un calcolo simile</p> $(24 : 4) + (24 : 6) = 10$ <p>Pone <math>24 : 4 = 24/4</math> e <math>24 : 6 = 24/6</math></p> <p>E poi calcola</p> $\frac{24}{4} + \frac{24}{6} =$ $= \frac{24 \times 6 + 24 \times 4}{4 \times 6} =$ $= \frac{144 + 96}{24} = \frac{240}{24} = 10$
---	--

che sse io multipricherò 10 che nne dee venire contra 24 partitore che farò la quantità multiprichata, cioè 24, e così fa a punto.

Adunque torniamo alla nostra ragione. Ch'aviamo 100 partito per una cosa e 100 partito per una cosa e più 5 e però poni i due partimenti come fosse uno rotto, a questo modo come vedi disegnato qui apresso. E ora multipricha in crocie, così come facesti dinanzi, cioè 100 vie una cosa che fa 100 cose. Ora multipricha l'altra schisa, cioè 100 vie una cosa e 5, fanno 100 cose e 500 numeri, giugni con 100 cose, ài 200 cose e più 500 numeri. Ora multipricha ciò ch'ài sotto alle verghe l'uno contro all'altro, cioè una cosa via una cosa e più 5, fanno uno cienso e più 5 cose.

Ora multipricha gli avvenimenti cioè 20 chontro a uno cienso e più 5 cose fanno 20 ciensi e più 100 cose, la qual quantità è iguali a 200 cose e a 500 numeri.

Ora chava da chatuna parte 100 cose averà averà che 20 ciensi sono iguali a 100 cose e a 500 numeri.

Recha a uno cienso, cioè che tu parta ongni cosa per li ciensi, averai che uno cienso è iguali a 5 cose e 25 numeri.

Dimeza le cose vienne  $2 + \frac{1}{2}$ <sup>5</sup>, multipricha per sé medesimo fa  $6 + \frac{1}{4}$ , giungnilo al numero cioè 25 fanno  $31 + \frac{1}{4}$  e diremo che vagli la cosa la radicie di  $31 + \frac{1}{4}$  più lo dimezamento che fu  $2 + \frac{1}{2}$ . E nnoi ponemmo chel primo partitore fosse una cosa, dunque si partì 100 in prima in radicie di  $31 + \frac{1}{4}$  più  $2 + \frac{1}{2}$  e poi si partì in più 5 dunque si partì poscia per radicie di  $31 + \frac{1}{4}$  più  $7 + \frac{1}{2}$ .

Ritornando al problema si ha

$$\frac{100}{x} + \frac{100}{x+5} = \frac{100(x+5)+100x}{x(x+5)} = \frac{100x+500+100x}{x^2+5x} = \frac{200x+500}{x^2+5x}$$

dunque

$$\frac{200x + 500}{x^2 + 5x} = 20$$

e

$$20(x^2 + 5x) = 200x + 500$$

Quindi

$$20x^2 + 100x = 200x + 500$$

$$20x^2 + 100x - 100x = 200x + 500 - 100x$$

$$20x^2 = 100x + 500$$

$$\frac{20}{20}x^2 = \frac{100}{20}x + \frac{500}{20}$$

$$x^2 = 5x + 25$$

$$x = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + 25} + 2 + \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{31 + \frac{1}{4}} + 2 + \frac{1}{2}$$

<sup>5</sup> Qui e nel seguito per una migliore comprensione scriviamo  $2 + \frac{1}{2}$ , usando il segno di addizione che era del tutto ignoto all'epoca, in luogo di 2 e  $\frac{1}{2}$  usato nel testo originale.



Con il passare del tempo aumentò il numero e la complessità dei problemi risolti con l'algebra che sempre più spesso veniva usata anche per risolvere problemi commerciali.

## L'INSEGNAMENTO DELL'ALGEBRA A FIRENZE NEL TRECENTO E NELLE PRIMA METÀ DEL QUATTROCENTO

Giovanni Villani, mercante e banchiere fiorentino, nella sua *Cronica* ricorda che nel 1328, a Firenze, su una popolazione di 90.000 persone

*I fanciulli e fanciulle che stanno a leggere sono da otto a diecimila. I fanciulli che stanno ad imparare l'abaco e l'algorismo in sei scuole da mille in milledugento. E quelli che stanno ad apprendere la grammatica e la loica in quattro grandi scuole da cinquecento in seicento.*

Un così alto numero di fanciulli che frequentavano una scuola d'abaco potrebbe far pensare a una esagerazione del cronista, ma i dati del Villani trovano riscontro nella ricca documentazione sulle scuole d'abaco fiorentine dalla quale si evince che tra l'inizio del Trecento e i primi decenni del Cinquecento a Firenze operarono una settantina di abacisti in una ventina di scuole.<sup>6</sup> Un così alto numero di ragazzi che studiavano l'abaco si spiega facilmente ricordando che Firenze, all'epoca, era una delle più importanti città commerciali d'Europa e i suoi numerosi mercanti e banchieri, molti dei quali avevano succursali in altre città italiane e straniere, richiedevano un gran numero di impiegati abili a far di conto. Impiegati che venivano formati appunto nelle scuole d'abaco.

Per ricostruire la storia dell'insegnamento dell'algebra a Firenze fino alla metà del Quattrocento ci sono di grande aiuto tre manoscritti:

- il codice Palatino 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze (c.1460)<sup>7</sup>
- il codice Ottoboniano latino della Biblioteca Apostolica Vaticana (c.1465)<sup>8</sup>
- il codice L.IV.21 della Biblioteca degli Intronati di Siena (1463)<sup>9</sup>

---

<sup>6</sup> Vedi Elisabetta Ulivi, *Scuole e maestri d'abaco in Italia tra Medioevo e Rinascimento*, in "Un ponte sul Mediterraneo", Il Giardino di Archimede, Firenze, 2002, 121-159.

<sup>7</sup> Il trattato di 591 carte di cm 29×22 è descritto in Gino Arrighi, *Nuovi contributi per la storia della matematica in Firenze nell'Età di Mezzo. Il codice Palatino 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze*, Istituto Lombardo. Accademia di scienze e lettere. Rendiconti, Classe di Scienze (A), 101, 1967, 395-437.

<sup>8</sup> Il trattato di 437 carte di cm 29×21,6 è descritto in Gino Arrighi, *La matematica in Firenze nel Rinascimento. Il codice Ottoboniano latino 3307 della Biblioteca Apostolica Vaticana*, Physis, 10, 1968, 70-82.

<sup>9</sup> Il trattato di 500 carte di cm 40×29 è descritto in Gino Arrighi, *Il codice L.IV.21 della Biblioteca degli Intronati di Siena e la "Bottega dell'abaco di Santa Trinita" in Firenze*, Physis, 7, 1965, 369-400. Una biografia di M° Benedetto e numerose notizie sui maestri d'abaco fiorentini si trovano in Elisabetta Ulivi, *Benedetto da Firenze (1429-1479) un maestro d'abaco del XV secolo*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 22, 2002, 1-243.

Autore dei trattati contenuti nei primi due manoscritti è un anonimo maestro fiorentino che si dichiara allievo di un certo Domenico d'Agostino Vaiaio, autore del terzo è Maestro Benedetto da Firenze (1429-1479).

I tre testi hanno molte caratteristiche in comune, tutti espongono con mentalità storica le nozioni di aritmetica, algebra, e limitatamente ai primi due di geometria pratica, come venivano tramandate nelle scuole d'abaco. Essi forniscono i nomi di molti matematici fiorentini del Tre-Quattrocento, di alcuni di essi tracciano un breve profilo biografico e riportano ampi stralci delle loro opere. Per quanto riguarda l'insegnamento dell'algebra a Firenze l'anonimo allievo di Domenico considera: Antonio de' Mazzinghi, Lucha di Matteo, Giovanni di Bartolo e Domenico d'Agostino; gli autori presentati da Benedetto sono: Biagio il vecchio, Antonio de' Mazzinghi e Giovanni di Bartolo.

Qui di seguito presentiamo, seguendo l'ordine cronologico, brevi note biografiche su ciascuno degli algebristi sopra menzionati e qualche problema da essi risolto.

M° BIAGIO (? , 1340)

Benedetto racconta che: "... maestro Biagio ... nel 1340 o circha morì, ... e fu maestro e compagno del gran maestro Paolo"<sup>10</sup>. I problemi attribuiti a Biagio sono centoquattordici, ventotto dei quali di tipo mercantile, circostanza quest'ultima assai interessante<sup>11</sup>. Ricordiamo infatti che quelli proposti da al-Khwarizmi e Leonardo Pisano sono invece tutti di tipo astratto. I problemi di carattere mercantile risolti da Biagio sono essenzialmente di tre tipi: calcolo di interessi, calcolo di prezzi di merci e viaggi; in quest'ultimo genere di problemi si chiede, di solito, di determinare la somma di denaro inizialmente posseduta da un viaggiatore che compie un certo numero di viaggi durante i quali guadagna, perde, spende ritrovandosi infine una certa somma di denaro. Nella risoluzione dei problemi Biagio fa uso delle prime quindici regole dell'elenco della Tabella 1, anche se nella maggior parte dei casi si limita all'uso delle prime sei.

Proponiamo il problema n. 65 dalla raccolta di M° Biagio

<p>Uno fa 2 viaggi. Al primo viaggio guadagna 6, al secondo guadagna alla medesima ragione, e di poi si trovò 27. Adomando con quanti si mosse. Farai positione che si movesse con una chosa, dove al primo viaggio, che guadagna 6, avrà fatto il primo viaggio una chosa &lt;e&gt; 6. E con questo e fa el secondo viaggio, che diciamo che guadagna alla medesima ragione ch'egli à</p>	<p>Si prende per incognita <math>x</math> la quantità di denaro con cui parte Dopo il primo viaggio ha <math>x+6</math> Dopo il secondo viaggio si trova 27 avendo</p>
--	--

<sup>10</sup> Il maestro Paolo al quale si fa riferimento è il famoso Paolo dell'abaco (? , 1367) matematico e astronomo, fondatore della Bottega d'abaco di Santa Trinita nella quale successivamente insegnarono Antonio de' Mazzinghi e Giovanni di Bartolo.

<sup>11</sup> I problemi di M° Biagio sono pubblicati in: M° Biagio, *Chasi exenplari alla regola dell'algebra*, a cura e con introduzione di L. Pieraccini, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, n° 5 Università di Siena, 1983.

<p>guadagniato al primo.          Onde dirai chosi: se d'una chosa e si truova fatto una chosa e 6, che si troverà fatto d'una chosa e 6. Moltiplicherai 1 chosa e 6 per una chosa e 6, fanno 1 censo 12 chose e 36 e questo si vuole partire per una chosa e debbane venire 27.          Onde se si moltiplicha 27 per una chosa, debbono fare 1 censo 12 chose e 36 ed e fanno 27 chose. Adunque arai 27 chose uguali a 1 censo 12 chose e 36, dove raguaglia le parti levando da ogni parte 12 chose e arai che uno censo e 36 sono uguali a 15 chose che, rechatì a uno censo è quel medesimo.          Dimeza le chose che fia la metà <math>7 + \frac{1}{2}</math>, moltiplicha in sé fanno <math>56 + \frac{1}{4}</math>, trane il numero che è 36, rimanghono <math>20 + \frac{1}{4}</math>, del quale piglia la radice che è <math>4 + \frac{1}{2}</math>, e tralo overo lo agugni alla metà delle chose, che a ciaschuno modo starà bene la valuta della chosa. Onde arai la chosa vale 3 overo 12. Adunque si mosse chon 3 overo chon 12.</p>	<p>guadagnato alla stessa ragione quindi  <math>x:x+6=x+6:27</math>          per cui  <math display="block">\frac{(x+6)^2}{x} = \frac{x^2+12x+36}{x} = 27</math>          quindi  <math display="block">x^2+12x+36=27x</math>  <math display="block">x^2+36=15x</math>  <math display="block">x = \left(7 + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(56 + \frac{1}{4} - 36\right)} = \left(7 + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(20 + \frac{1}{4}\right)} = \left(7 + \frac{1}{2}\right) \pm \left(4 + \frac{1}{2}\right)</math>          Ed infine  <math display="block">x = \begin{cases} 3 \\ 12 \end{cases}</math></p>
--	--

M° ANTONIO DE' MAZZINGHI (1350/5-1385/86)<sup>12</sup>

Varie fonti del XV secolo indicano concordemente M° Antonio de' Mazzinghi come il migliore matematico fiorentino di tutti i tempi, giudizio peraltro già formulato dai suoi contemporanei. Benedetto e l'anonimo allievo di Domenico ci raccontano infatti che, avendo M° Paolo lasciato in eredità i suoi libri astrologici e i suoi strumenti finché non si fosse trovato un valido astrologo giudicato come tale da quattro maestri fiorentini, dopo lunghe dispute l'eredità fu mandata con molti onori a casa di Maestro Antonio. Purtroppo non ci è pervenuto alcuno dei molti trattati da lui scritti nella sua breve vita. Fortunatamente Benedetto, l'allievo di Domenico e un'altro anonimo abacista ci hanno tramandato un certo numero dei suoi problemi algebrici tratti da una sua opera intitolata *Fioretti*. In tutto ci sono pervenuti 55 problemi, la maggior parte dei quali sono di tipo teorico e richiedono di trovare due o tre numeri o di dividere un numero in due o tre parti che soddisfino ad alcune condizioni<sup>13</sup>. I problemi, in particolare quelli teorici, sono di notevole complessità e trascritti in simbolismo moderno conducono a sistemi algebrici dei quale sono un esempio i seguenti

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt{2 + \frac{x}{y}} + \sqrt{2 + \frac{y}{x}} = 7 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

<sup>12</sup> Elisabetta Ulivi, *Per una biografia di Antonio Mazzinghi, maestro d'abaco del XIV secolo*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 14(1), 1996, 101-150; Raffaella Franci, *Antonio de' Mazzinghi an Algebraist of the 14th Century*, *Historia Mathematica*, 15, 1988, 240-249.

<sup>13</sup> La raccolta curata da M° Benedetto contenente 44 problemi, di cui 36 teorici e gli altri mercantili e pubblicata in: M° Antonio de' Mazzinghi, *Trattato di Fioretti nella trascelta a cura di M° Benedetto*, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Domus Galileana, Pisa, 1967.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = 6 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 19 \\ x : y = y : z \\ x(y + z) + y(z + x) + z(x + y) = 228 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x : y = z : t \text{ e } zt = 10 \\ x^2 + y^2 = 60 \\ z^2 + t^2 = xy \end{cases}$$

Solo la lettura dei problemi potrebbe mostrare in pieno la straordinaria abilità algebrica di Antonio. Spesso i quesiti proposti portano a espressioni complicate cosicché per raggiungere una delle forme canoniche è necessario eseguire molti calcoli quali: somme e prodotti di polinomi e frazioni algebriche, razionalizzazione di radicali. Queste operazioni ovviamente sono tutte svolte in modo retorico, cioè a parole, ma con una tale chiarezza e gusto algebrico che basta tradurre le parole di Antonio nel moderno simbolismo per rendersi conto che i calcoli sono fatti proprio come li faremmo noi oggi. Anche se nelle trascrizioni in simbolismo moderno degli enunciati dei problemi che abbiamo finora proposto abbiamo usato più incognite, dalla lettura dei testi originali si può vedere come gli algebristi medioevali in realtà introducessero una sola incognita e esprimessero poi le altre quantità ignote mediante essa servendosi delle condizioni imposte dal problema. Antonio, invece, in sette problemi usa due incognite, una denominata *cosa* e l'altra *quantità*, per quanto finora ne sappiamo sembra essere stato il primo algebrista a fare ciò. Vediamo un problema in cui egli usa questa tecnica.

<p>Trova 2 numeri i cui quadrati sieno 100 e multiplichando l'uno nell'altro faccino 5 meno che è la differenza ch'è dall' uno numero all'altro multiplicata in sé.</p> <p>.....</p> <p>Poni chel primo numero sia una chosa più radice d'alchuna quantità e il secondo sia una chosa meno radice d'alchuna quantità e multiplica ciaschuno numero in sé et agugni e quadrati, fanno 2 censi et alchuna chosa non saputa. E quelli quadrati àno a fare 100, dove quella chosa non saputa è la differentia che è da 100 a 2 censi che è 100 meno 2 censi. Adunque la prima multiplicatione è 50 meno 1 censo, adunque lo primo numero è una chosa più radice di 50 meno 1 censo e lo secondo è una cosa meno radice di 50 meno uno censo.</p> <p>E chosì ài trovato 2 quantità che i loro quadrati fanno 100.</p> <p>Ora ci resta a vedere se lla multiplicatione dell'uno nell'altro fanno 5 meno che il</p>	<p>Si cercano due numeri u, v tali che</p> $u^2 + v^2 = 100 \quad e \quad uv = (u - v)^2 - 5$ <p>Antonio pone</p> $u = x + \sqrt{q} \quad v = x - \sqrt{q}$ <p>onde</p> $u^2 + v^2 = 2x^2 + q$ <p>e</p> $2x^2 + q = 100 \text{ per cui } q = 50 - x^2$ <p>quindi</p> $u = x + \sqrt{50 - x^2} \quad v = x - \sqrt{50 - x^2}$ <p>e</p> $uv = 2x^2 - 50$
--	--

<p>quadrato della differentia .  Dove multiplicherai una chosa più radice di 50 meno 1 censo per una chosa meno radice di 50 meno 1 censo, fanno 2 censi meno 50 a quali agunto 5 fanno 2 censi meno 45 e questo è iguali al quadrato della differentia.  Onde troverai che la differentia che è da una chosa meno radice di 50 meno 1 censo infino una chosa più radice di 50 meno un censo , che v'è 2 volte la radice di 50 meno 1 censo che è radice di 200 meno 4 censi.  Dove multiplicato la radice di 200 meno 4 censi in sé fanno 200 meno 4 censi, e questo è iguali a 2 censi meno 45.  Adunque raguaglierai le parti dando a ogni parte 45 e 4 censi et aremo che 6 censi sieno iguali a 245 che rechando a uno censo aremo che uno censo sia iguali a <math>40+5/6</math>. E perché noi ponemo che la prima parte fusse una chosa et radice di 50 meno uno censo, trarrai <math>40+5/6</math> di 50 rimanghono <math>9+1/6</math>. E perché la chosa vale radice di <math>40+5/6</math>, dirai che l'uno numero fusse radice di <math>40+5/6</math> et la radice di <math>9+1/6</math> e il sechondo numero, ..., la radice di <math>40+5/6</math> meno la radice di <math>9+1/6</math>.</p>	<p>Ora  <math display="block">2x^2 - 50 + 5 = 2x^2 - 45 = (u - v)^2</math> <math display="block">(u - v)^2 = 2\sqrt{q} = 2\sqrt{50 - x^2} = \sqrt{200 - 4x^2}</math>   Quindi  <math display="block">2x^2 - 45 = 200 - 4x^2</math>   <math display="block">6x^2 = 245 \quad x = \sqrt{40 + 5/6}</math>   E infine  <math display="block">u = \sqrt{40 + 5/6} + \sqrt{9 + 1/6}</math>   <math display="block">v = \sqrt{40 + 5/6} - \sqrt{9 + 1/6}</math></p>
---	--

La lettura del seguente problema ci da invece la misura della abilità di Antonio nel padroneggiare il calcolo algebrico.

<p>Fa di 10, 2 parti che partito l'una per l'altra e l'altra per l'una et per quelli avvenimenti diviso 16 e di ciaschuno avvenimento preso la radice et agunti insieme faccino 10. Adimandasi quali sono quelle parti.  Farai positione che l'una parte sia 5 meno una chosa e lla sechonda parte sia 5 più una chosa , dove dividerai l'una per l'altra e l'altra per l'una.  E prima 5 meno una chosa in 5 più una chosa viene questo cioè <math>\frac{5 \text{ meno } 1 \text{ co}}{5 \text{ p. } 1 \text{ co}}</math>,  e di poi parti 5 più una chosa in 5 meno una chosa viene <math>\frac{5 \text{ più } 1 \text{ co}}{5 \text{ meno } 1 \text{ co}}</math>.  Ora partirai 16 per ciaschuno avvenimento e prima partirai 16 per <math>\frac{5 \text{ meno } 1 \text{ co}}{5 \text{ p. } 1 \text{ co}}</math>, e terrai il modo dato ne' rotti, cioè di multiplchare 16 per 5 più 1co e partire per 5 meno una chosa, viene <math>\frac{80 \text{ p. } 16 \text{ co}}{5 \text{ m. } 1 \text{ co}}</math>,  E dipoi partirai el 16 nell'altro avvenimento, cioè in <math>\frac{5 \text{ più } 1 \text{ co}}{5 \text{ m. } 1 \text{ co}}</math>, e multiplicherai 16 per 5 meno 1 chosa et dividerai in 5 più 1 chosa, viene <math>\frac{80 \text{ m. } 16 \text{ co}}{5 \text{ p. } 1 \text{ co}}</math>,  E di questi 2 avvenimenti abbiamo a pigliare la radice e ragugnerle insieme et debbono fare 10.  Adunque pigliando la radice aremo la radice</p>	<p>Si tratta di dividere 10 in due parti u, v tali che appunto <math>u+v=10</math> e <math>\sqrt{16:\frac{u}{v}} + \sqrt{16:\frac{v}{u}} = 10</math>.</p> <p>L'autore pone <math>u=5-x</math> e <math>v=5+x</math></p> $(5 - x):(5 + x) = \frac{5 - x}{5 + x}$ $(5 + x):(5 - x) = \frac{5 + x}{5 - x}$ $16:\frac{5 - x}{5 + x} = \frac{16(5 + x) + 5 - x}{5 - x} = \frac{80 + 16x}{5 - x}$ $16:\frac{5 + x}{5 - x} = \frac{16(5 - x) + 5 + x}{5 + x} = \frac{80 - 16x}{5 + x}$ <p>L'equazione che risolve il problema e dunque</p> $\sqrt{\frac{80+16x}{5-x}} + \sqrt{\frac{80-16x}{5+x}} = 10$
---	---

di  $\frac{80 p. 16 co}{5 m.1 co}$  e la radice di  $\frac{80 m. 16 co}{5 p.1 co}$  e queste 2 radice fanno 10.

E noi sappiamo che moltiplicando ciaschuna in sé et poi 2 volte l'una nell'altra fanno quanto a moltiplicare 10 in sé medesimo.

Onde moltiplicherai la radice di  $\frac{80 p. 16 co}{5 m.1 co}$  in sé fanno  $\frac{80 p. 16 co}{5 m.1 co}$  e di poi moltiplicha la radice di  $\frac{80 m. 16 co}{5 p.1 co}$  in sé fanno  $\frac{80 m. 16 co}{5 p.1 co}$ .

E queste 2 moltiplicationi arai a ragugnere insieme  $\frac{80 m. 16 co}{5 p.1 co}$  chon  $\frac{80 p. 16 co}{5 m.1 co}$

Dove moltiplicherai per chanto, cioè 80 meno 16 chose per 5 meno una chosa fanno 400 meno 160 chose più 16 censi, cioè fanno 400 et 16 censi meno 160 chose.

E moltiplichando 80 più 16 chose per 5 più una chosa fanno 400 et 16 censi più 160 chose. Agugni insieme fanno 800 più 32 censi.

E questo dividi nella moltiplicatione di 5 più una chosa in 5 meno una chosa, cioè in 25 meno un censo, viene  $\frac{800 p.32 ce}{25 m.1 ce}$

E questo trai di 100, cioè del quadrato di 10, rimangono 100 meno questo cioè  $\frac{800 p.32 ce}{25 m.1 ce}$ .

Ma anchora si può dare in una quantità e questo è che rechi 100 a questi rotti, cioè 25 meno 1 censo esimi.

Dove moltiplicherai per 25 meno 1 censo, dove moltiplichando 100 per 25 meno uno censo faranno 2500 m. 100 censi et dirai che 100 sono  $\frac{2500 m.100 c}{25 m.1 c}$ , trane  $\frac{800 p.32 ce}{25 m.1 ce}$  rimangono  $\frac{1700 meno 132 c}{25 meno 1 censo}$ . E questo è iguali al

doppio dela moltiplicatione dell'una parte all'altra.

E moltiplichando la radice di  $\frac{80 m. 16 co}{5 p.1 co}$  per la radice di  $\frac{80 p. 16 co}{5 m.1 co}$  fanno la radice di  $\frac{6400 meno 256 c}{25 meno 1 c}$ .

E questa quantità è iguali ala metà di  $\frac{1700 meno 66 c}{25 meno 1 censo}$ . Cioè  $\frac{850 meno 66 c}{25 meno 1 censo}$ .

Onde per levare via e nomi di radice moltiplicherai ciaschuna quantità in sé.

E prima moltiplicha in sé la radice di  $\frac{6400 meno 256 c}{25 meno 1 c}$  fanno  $\frac{6400 meno 256 c}{25 meno 1 c}$ .

E poi moltiplicha  $\frac{850 meno 66 c}{25 meno 1 censo}$  in sé medesimo fanno  $\frac{722500 p 4356 cc meno 11200 c}{partititi per lo quadrato di 25 meno 1 c}$ .

Ora per non avere infuschamento di rotti moltiplicherò ciaschuna parte per lo quadrato di 25 meno uno censo

<Per brevità tralasciamo questa parte di calcoli >

Adunque arai 2 quantità l'una iguali all'altra, cioè 722500 più 4356 censi di censi meno 112200 censi iguali a 160000 più 256 censi

Da cui

$$\left(\sqrt{\frac{80+16x}{5-x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{80-16x}{5+x}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{80+16x}{5-x}}\sqrt{\frac{80-16x}{5+x}} = 100$$

$$\frac{80+16x}{5-x} + \frac{80-16x}{5+x} + 2\sqrt{\frac{80+16x}{5-x}}\sqrt{\frac{80-16x}{5+x}} = 100$$

Per calcolare

$$\frac{80+16x}{5-x} + \frac{80-16x}{5+x}$$

L'autore calcola

$$(80-16x)(5-x) = 400 - 160x + 16x^2$$

$$(80+16x)(5+x) = 400 + 160x + 16x^2$$

$$400 - 160x + 16x^2 + 400 + 160x + 16x^2 = 800 + 32x^2$$

Il risultato cercato è

$$(800 + 32x^2) : (5+x)(5-x) = \frac{800 + 32x^2}{25 - x^2}$$

Dunque

$$100 - \frac{800 + 32x^2}{25 - x^2} = 2\sqrt{\frac{80+16x}{5-x}}\sqrt{\frac{80-16x}{5+x}}$$

$$100 - \frac{800+32x^2}{25-x^2} = \frac{100(25-x^2)-800+32x^2}{25-x^2} = \frac{2500-100x^2-800+32x^2}{25-x^2} = \frac{1700-132x^2}{25-x^2}$$

Quindi

$$\frac{1700 - 132x^2}{25 - x^2} = 2\sqrt{\frac{80+16x}{5-x}}\sqrt{\frac{80-16x}{5+x}}$$

$$\sqrt{\frac{80+16x}{5-x}}\sqrt{\frac{80-16x}{5+x}} = \sqrt{\frac{6400-256x^2}{25-x^2}}$$

$$\sqrt{\frac{6400-256x^2}{25-x^2}} = \frac{850 - 132x^2}{25 - x^2}$$

$$\sqrt{\frac{6400-256x^2}{25-x^2}}\sqrt{\frac{6400-256x^2}{25-x^2}} = \frac{6400-256x^2}{25-x^2}$$

$$\frac{850 - 66x^2}{25 - x^2} \times \frac{850 - 66x^2}{25 - x^2} = \frac{722500 + 4356x^4 - 112200x^2}{(25 - x^2)^2}$$

$$\left(\frac{850 - 66x^2}{25 - x^2}\right)^2 = \frac{722500 + 4356x^4 - 112200x^2}{(25 - x^2)^2}$$

Quindi

<p>di censo meno 12800 censi. Dove raguaglierai le parti, levando da ogni parte 160000 e arai 562500 et 4356 censi di censo meno 1122000 censi iguali a 256 censi di censo meno 12800 censi. Di poi trarrai da ogni parte 256 censi di censo e darai a ogni parte 112200 et arai che 562500 et 4100 censi di censo iguali 99400 censi, che è la reghola scritta nel primo capitolo di questo libro. Che arrecherai a uno censo di censo et arai che uno censo di censo et <math>137 + \frac{8}{41}</math> sono iguali a 24 censi e <math>\frac{10}{41}</math>.</p> <p>&lt; tralasciamo di nuovo i calcoli relativi alla applicazione della regola 21 della tabella 1 &gt; E dirai chel censo vaglia 9 dove la chosa vale 3. E noi ponemo che la prima fusse 5 meno una chosa adunque fu 2: L'altra fu 5 più una chosa, fu 8.</p>	$\frac{6400 - 256x^2}{25 - x^2} = \frac{722500 + 4356x^4 - 112200x^2}{(25 - x^2)^2}$ <p>e</p> $722500 + 4356x^4 - 112200x^2 = (6400 - 256x^2)(25 - x^2) = 160000 - 12800x^2 + 256x^4$ <p>Ed infine la forma canonica</p> $562500 + 4100x^4 = 99400x^2$ <p>Dividendo tutto per 4100 si ottiene</p> $x^4 + 137 + \frac{8}{41} = (24 + \frac{10}{41})x^2$
--	--

LUCA DI MATTEO (c. 1356, 1433/36)

Luca di Matteo fu uno dei più noti abacisti fiorentini del suo tempo, la sua scuola era situata sul Lungarno tra Ponte Santa Trinita e ponte alla Carraia. L'autore del codice Pal. 753 ci informa che: *Maestro Lucha di Matteo fu di grandissimo ingegnio e al suo tempo scrisse molti libri atti a merchatantia e anchora di cose sottile*. Di lui ci sono rimaste tre copie di un trattato d'abaco che non contiene però un capitolo dedicato all'algebra. L'anonimo allievo di Agostino Vaiao nel codice Pal. 537 propone *l'asolutione di 50 ragioni di Maestro Lucha*, si tratta di problemi risolti con l'algebra pochi dei quali di tipo mercantile: solo sei di calcolo di interessi, uno di cambio di monete e due di "far compagnia". Alla fine della sua esposizione l'autore del codice osserva

Non ti maravigliare che di chose o vero chasi facili abbiamo parlato, inperò che moltissimi chasi difficili scrive, ma perché altri innanzi a llui scrissono quelli tali chasi, mi pare honesta chosa quelli scrivere ne' chasi di quel tale.

Proponiamo il 42-esimo problema della raccolta del Pal. 573 la cui risoluzione l'autore del codice attribuisce proprio a Maestro Lucha

<p>Fa di 38, 3 parti in chontinua proportione che multiplicata la prima per 3 e la sechonda per 4 e la terça per 5, faccino le dette multiplicationi agunte insieme 162. Adimandasi quanto è ciaschuna parte. Ove M<sup>o</sup> Lucha molto facilmente in questa quistione da solutione, e propriamente questo modo fu suo e questa è delle più alte chose che lui scrivesse d'arismetricha. E in questo modo dicie: farai positione la sechonda parte sia 2 chose, e tu sai che lla</p>	<p>Si tratta di trovare 3 numeri a, b, c tali che</p> $a:b=b:c$ $a+b+c= 38$ $3a+4b+5c=162$ <p>L'autore pone <math>b = 2x</math></p>
--	---

<p>sechonda s'â a multiplichare per 4, adunqua fanno 8 chose, e questo trai di 162, rimane 162 men 8 chose.</p> <p>Adunque âi a ffare di 38 meno 2 chose 2 parti che l'una multiplicata per 3 e l'altra per 5 faccino 162 meno 8 chose.</p> <p>Dove prima dividi 38 in 2 parti che multiplicata l'una per 3 e l'altra per 5 faccino 162, dove dirai l'una essere 14 e l'altra 24, cioè quella che ssi multiplica per 3 sia 14 e quella che si multiplica per 5 sia 24.</p> <p>Ora ti resta a dividere 2 chose meno in 2 parti che l'una multiplicata per 3 e l'altra per 5 faccino meno 8 chose, dove dirai che l'una sia una chosa meno e l'altra anchora una chosa meno. Adunque la prima parte sia 14 meno una chosa e l'altra sia 2 chose e l'altra sia 24 meno una chosa, e multiplicata l'una per 3, l'altra per 4, l'altra per 5 fanno 162.</p> <p>Ora resta da vedere se lle dette parti sono nella proportione chontinua, e quando le parti sono nella detta proportione àno tale natura che tanto fa a multiplichare la prima nella terça quanto la sechonda in sé medesimo.</p> <p>Dove adunque in questo tanto debbe fare 14 meno una chosa vie 24 meno una chosa quanto a multiplichare 2 chose in sé. Et a multiplichare 14 meno una chosa vie 24 meno una chosa fanno 1 censo e 336 meno 38 chose. E a multiplichare 2 chose in sé medesimo fanno 4 censi.</p> <p>Adunque 1 censo e 336 meno 38 chose, sono iguali a 4 censi e raguagliando le parti arai 3 censi e 38 chose iguali a 336, che è la quarta reghola.</p> <p>Che partirai ne' censi per arechare a uno censo, et arai uno censo et <math>12 + \frac{2}{3}</math> chose iguali a 112 per numero.</p> <p>Dove dimeza le chose aremo <math>6 + \frac{1}{3}</math>, multiplica in sé fanno <math>40 + \frac{1}{9}</math> pollo sopra 112 fanno <math>152 + \frac{1}{9}</math>, la cui radicie è <math>12 + \frac{1}{3}</math>, della quale trai la metà delle chose rimanghono 6 e tanto vale la chosa.</p> <p>Adunque la prima parte che trovamo era 14 men una chosa fu 8, e la sechonda che fu 2 chose fu 12, e la terzza che ponemo era 24 meno una chosa fu 18. E chosi farai le simili</p>	<p>e poi osserva che  <math>38 - 2x = a + c</math> e <math>162 - 8x = 3a + 5c</math></p> <p>Quindi per risolvere il problema basta dividere <math>38 - 2x</math> in due parti tali che <math>3a + 5c = 162 - 8x</math>.</p> <p>A questo scopo  prima divide 38 in due parti a', c' tali che <math>38 = 3a' + 5c'</math>, le parti sono 14 e 24</p> <p>poi divide divide <math>38 - 2x</math> nel modo desiderato ponendo <math>a = 14 - x</math> e <math>c = 24 - x</math></p> <p>Ora per determinare x ricorda che a,b,c devono essere in continua proporzione e quindi</p> $ac = b^2$ <p>e pertanto deve essere</p> $(14 - x)(24 - x) = 4x^2$ <p>cioè</p> $336 + x^2 - 38x = 4x^2$ <p>e infine è</p> $3x^2 + 38x = 336$ <p>Da cui</p> $x^2 + (12 + \frac{2}{3})x = 112$ <p>e</p> $x = \sqrt{152 + \frac{1}{9}} - 6 + \frac{1}{3} = 12 + \frac{1}{3} - 6 + \frac{1}{3} = 6$ <p><math>u = 14 - 6 = 8</math> e <math>v = 24 - 6 = 18</math></p>
---	--

GIOVANNI DI BARTOLO ( c. 1364-1440)

Giovanni di Bartolo assieme ad Antonio de' Mazzinghi è presente in tutti e tre i manoscritti sopra menzionati, è comunque M° Benedetto quello che gli dà maggior rilievo. Da lui veniamo informati che Giovanni figlio di Bartolo, un muratore di modeste condizioni economiche, fu allievo di Antonio nella Bottega d'abaco di Santa Trinita. Morto Antonio, Giovanni, ancora molto giovane,



incominciò ad insegnare nella bottega che era stata del suo maestro, il quale gli aveva lasciato in eredità i suoi libri. Gli altri abacisti della città pensando che egli non fosse all'altezza del compito cercarono di fargli chiudere la scuola tendendogli un tranello. Essi radunarono tutti i loro migliori allievi e li mandarono alla bottega di Giovanni con l'ordine di metterlo in difficoltà. Essi andarono e posero le loro domande a cui fu risposto in modo così chiaro e soddisfacente tanto che molti di loro anziché tornare dai loro maestri rimasero alla scuola di Giovanni. Benedetto ricorda che egli scrisse molti trattati nessuno dei quali ci è pervenuto. Notizie di questo abacista ci sono fornite anche da vari documenti conservati negli archivi fiorentini. Da questi apprendiamo che per un certo periodo egli affiancò all'attività di insegnamento dell'abaco quella di docente di Astrologia all'Università di Firenze e che prestò la sua attività di consulente contabile nella costruzione della cupola del Duomo negli anni 1417, 1420 e 1425.

Tutti e tre i manoscritti riportano casi di Giovanni risolti con l'algebra, la sezione più numerosa è quella di Benedetto che riporta ben 57 problemi<sup>14</sup>. Egli inoltre specifica di aver scelto quei casi non perché particolarmente difficili ma perché piacevoli, circa una metà dei problemi, infatti, è del tipo che gli abacisti indicavano come "chasi dilettevoli" e che oggi vengono ascritti alla cosiddetta "matematica ricreativa". Anche i problemi mercantili sono però ben rappresentati, troviamo infatti 16 problemi di baratto, 4 di compagnie, 2 di calcolo di interesse. Degli altri problemi ben 21 riguardano uomini che hanno danari e 8 uomini che fanno un lavoro. I problemi presentati nel Codice Palatino 573 sono in parte diversi e scelti tra quelli più semplici, vediamone un paio:

<p>Uno chonprò alquante huova alquanti danari, e tante huova quant'egli comprò tanti danari gli chostò l'huovo. Poi chonprò uno huovo 6 denari e agunselo cho' gli altri e trovò che gli venne la choppia sottosopra 7 danari. Vo' sapere quante huova chonprò e quanti danari gli costò l'uno.</p> <p>Poni egli chonprasse una chosa d'huova, adunque gli chostò l'uno una chosa di denari, dove una chosa d'huova chosteranno uno censo di danari a' quali agugni 6 danari che gli chostò quello huovo et aremo uno censo di danari e 6 danari e l'huova sieno una chosa d'huova et 1.</p> <p>E noi diciamo che lla choppia gli chostò sottosopra 7 danari, dove un huovo gli chostò <math>3+1/2</math> danari.</p> <p>Dove se un huovo vale <math>3+1/2</math> danari dirai che verranno una chosa d'huovo e un huovo? Dove moltiplicherai una chosa et uno vie <math>3+1/2</math> danari, fanno <math>3+1/2</math> chose et <math>3+1/2</math> danari. E tanto varebbono et noi abbiamo detto vagliono</p>	<p>L'autore indica con <math>x</math> il numero di uova comperate che è anche il prezzo di un singolo uovo dunque per <math>x</math> uova sono stati pagati <math>x^2</math> danari</p> <p>Con l'acquisto successivo di un uovo a 6 danari si avrà che</p> <p><math>x+1</math> uova sono costate <math>x^2+6</math> danari</p> <p>Se un paio di uova sottosopra (cioè in media) costano 7 danari un singolo uovo costa <math>3+1/2</math> danari</p> <p>Per calcolare il costo medio delle <math>x+1</math> uova pagate <math>x^2+1</math> danari l'autore applica la regola del tre che segue dalla proporzione <math>1:3+1/2=x+1:x^2+6</math></p> <p>da cui</p> $(3+1/2)(x+1)=x^2+6$ $(3+1/2)x +3+1/2=x^2+6$ <p>E infine</p>
--	--

<sup>14</sup> Vedi: Giovanni di Bartolo, *Certi chasi nella trascelta di Maestro Benedetto*, a cura e con introduzione di Marisa Pancanti, Quaderni del Centro studi della Matematica Medioevale n°3, Università di Siena, 1982.

<p>un censo e 6 danari. Adunque un censo e 6 danari sono iguali a <math>3+1/2</math> chose et <math>3+1/2</math> danari.</p> <p>Dove raguaglia le parti levando da ogni parte <math>3+1/2</math> danari arai uno censo et <math>2+1/2</math> danari iguali a <math>3+1/2</math> chose, che è la quinta reghola.</p> <p>Dove dimeza le chose sono <math>1+3/4</math>, multiplica in sé fanno <math>3+1/16</math>, e trane il numero, cioè <math>2+1/2</math> rimane <math>9/16</math>, la cui radicie, che è <math>3/4</math>, agugni overo trai della metà delle chose. Se l'agugni arai chonprò <math>2+1/2</math> huova e chostò l'uno <math>2+1/2</math> denari, e se trai dirai chonprò uno huovo e chostò uno denaro.</p> <p style="text-align: center;">****    ****    ****</p> <p>Due àno danari. Dicie il primo al sechondo: se ttu mi dessi la radicie de' tuoi danari io arei due chotanti di te. Dicie il sechondo al primo: se ttu mi dessi tal parte de' tuoi danari quant'io do a te de' miei io arei quanto ài tu. Adimandasi che aveva ciaschuno.</p> <p>Poni che il sechondo abbia uno censo e, perché il primo gli adimanda la radicie, che è una chosa, rimarrà al sechondo uno censo meno una chosa. E perché dicie d'avere 2 chotanti di lui chonviene chel primo abbia 2 censi meno 2 chose quando ebbe avuto una chosa, ma prima aveva 2 censi meno 3 chose.</p> <p>Ora il sechondo vuole dal primo quella parte che da a llui e il sechondo da al primo una chosa, dove una chosa è <math>1/1co</math> esimi, e però piglierai <math>1/co</math> esimi di 2 censi meno 3 chose, che sono 2 chose meno 3 che agunto a uno censo che à il sechondo fanno uno censo e 2 chose meno 3. E al primo rimarrà 2 censi meno 5 chose et più 3, e questo è iguali a uno censo e a 2 chose meno 3. Dove raguaglia le parti et arai che uno censo et 6 sono iguali a 7 chose, che è la quinta reghola.</p> <p>Dove dimeza le chose et multiplica in sé, fanno <math>12+1/4</math>, trane 6, rimane <math>6+1/4</math> la chui radicie che è <math>2+1/2</math> agugni alla metà delle chose fanno 6. E tanto vale la chosa e il censo vale 36. Adunque il primo à 54 e il sechondo 36.</p>	$x^2 + 2 + 1/2 = 3 + 1/2$ <p>e</p> $x = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{2}\right)} \pm \left(1 + \frac{3}{4}\right)$ $x = \sqrt{3 + \frac{1}{16} - 2 - \frac{1}{2}} \pm \left(1 + \frac{3}{4}\right)$ $x = \sqrt{\frac{9}{16}} \pm \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \pm \left(1 + \frac{3}{4}\right) \frac{3}{4}$ <p style="text-align: center;">****    ****    ****</p> <p>L'autore pone uguale a <math>x^2</math> la somma posseduta inizialmente dal secondo uomo, per cui egli da al primo <math>x</math> danari e gli rimangono <math>x^2-x</math> danari, mentre il primo avrà <math>2(x^2-x)=2x^2-2x</math> danari e prima aveva <math>2x^2-2x-x=2x^2-3x</math>.</p> <p>Il secondo vuole dal primo <math>x/x^2</math> esimi di quello che aveva inizialmente cioè <math>(1/x)(2x^2-3x)=2x-3</math>, dopo questa dazione il secondo avrebbe <math>2x-3+x^2</math> e il primo <math>2x^2-3x-(2x-3)=2x^2-5x+3</math>.</p> <p>Queste due quantità devono essere uguali dunque</p> $2x^2-5x+3 = 2x-3+x^2$ <p>e</p> $x^2 + 6 = 7x$ $x = \sqrt{\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 - 6} + \left(3 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{6 + 1/4} + 3 + \frac{1}{2}$ $x = 2 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 6$ <p>Dunque il secondo che inizialmente aveva <math>x^2</math> aveva 6 danari. Il primo che inizialmente aveva <math>2x^2-3x</math> avrà 54.</p>
--	---

DOMENICO D'AGOSTINO VAIAO (1386-C.1452)

Domenico esercitò l'attività di vaiaio, cioè mercante di pellicce di vaio, in via Vacchereccia in società con un certo Tommaso di Scolaio Ciacci. Nonostante che l'anonimo autore del Pal. 573 si dichiari suo discepolo, non abbiamo alcun documento che attesti una sua attività di insegnamento, con buona probabilità egli si dedicò alla matematica per puro piacere personale. L'autore del codice Palatino ci riferisce che Agostino aveva composto un'opera matematica scritta in forma di dialogo e suddivisa in tre parti riguardanti il calcolo delle radici, l'algebra

e la geometria. L'opera non ci è pervenuta e conosciamo di essa solo i 50 problemi risolti con l'algebra riportati nel codice Pal. 573 e 6 casi geometrici contenuti nel manoscritto Ott. Lat. 3307.

Dei 50 problemi presenti nel codice Palatino ve sono 2 di cambio, 6 di baratto, 7 di compagnie, 9 di uomini che hanno denari, 7 di uomini che fanno un lavoro. L'autore della raccolta ci avverte che "benchè quella opera sia chonposta chon interlochutori nientedimeno io parlerò senplice". Egli afferma anche di non aver scelto i casi "più sottili", ma quelli più appropriati alle regole esposte nella parte precedente del testo. Tra i problemi di Domenico ne scegliamo uno che se pure di semplice soluzione ci sembra interessante.

<p>Io voglio rachorre tanti numeri, chominciando da uno, ascendendo per unità, tanto che faccino 1830. Adimando quale sia l'ultimo numero overo il maggiore. Faremo positione che l'ultimo numero sia una chosa, adunque diremo s'abbia a rachorre tutti e numeri che sono da uno insino in una chosa. Dove porrai 1 sopra una chosa, sechondo el modo dato nello sechondo chapitolo della quinta parte, e aremo 1 chosa e 1, e di poi piglia il <math>\frac{1}{2}</math> d'una chosa, che è <math>\frac{1}{2}</math> chosa e questo multiplica per una chosa e 1, fanno <math>\frac{1}{2}</math> censo e <math>\frac{1}{2}</math> chosa, e questo è iguali a 1830. Dove, sechondo la quarta reghola, arrecha a uno censo, e arai uno censo e una chosa iguali a 3660. E di poi dimeza la chosa, che lla metà è <math>\frac{1}{2}</math>, multiplica in sé fanno <math>\frac{1}{4}</math>, pollo sopra il numero fanno <math>3660 + \frac{1}{4}</math>, del quale numero piglia la radice che è <math>60 + \frac{1}{2}</math>. E di questo trai la metà della chosa, verrà 60, e 60 vale la chosa. Adunque l'ultimo numero fu 60. E chosi farai le simili.</p>	<p>Si tratta di determinare il numero <math>x</math> tale che  <math>1+2+3+ \dots + x= 1830</math></p> <p>L'autore facendo riferimento alla nota formula  <math>1+2+3+\dots+ n = n(n+1)/2</math>  che ricorda essere riportata anche in una parte precedente del trattato, calcola</p> <p><math>\frac{1}{2} x(x+1) = 1/2x^2+1/2 x = 1830</math>  Quindi  <math>x^2 + x = 3660</math></p> <p>e</p> <p><math>x = \sqrt{3660 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = 60 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 60</math></p>
--	---

#### L'INSEGNAMENTO DELL'ALGEBRA A FIRENZE NELLA SECONDA METÀ DEL QUATTROCENTO

I tre manoscritti che abbiamo menzionato all'inizio del paragrafo precedente ci hanno permesso di ricostruire la storia dell'insegnamento dell'algebra a Firenze fino alla metà del Quattrocento, epoca in cui i manoscritti medesimi furono compilati, per estendere la nostra analisi anche alla seconda metà del secolo ci serviremo direttamente dei testi che ci sono rimasti, i personaggi più importanti che emergono da questa analisi sono in primo luogo gli autori di quei manoscritti, in particolare Maestro Benedetto e poi Giovanni del Sodo, Raffaello Canacci e Francesco Galigai.

MAESTRO BENEDETTO (Firenze,1429-1479), esercitò l'insegnamento dell'abaco a Firenze dal 1448 al 1479 in varie scuole, di lui ci sono rimasti due trattati: il *Trattato d'abaco* (c.1460) e la *Pratica d'arismetrica* (1463). Il contenuto del primo

testo ricalca quello che potremmo chiamare il programma curriculare della scuola d'abaco e non contiene quindi l'algebra. Questo testo, scritto in modo molto chiaro e accattivante, i vari capitoli sulle questioni mercantili sono infatti intercalati da capitoli che espongono "chasi di diletto", cioè giochi matematici, ci è pervenuto in circa venti copie manoscritte a testimonianza della sua diffusione<sup>15</sup>. L'altro trattato consiste invece di una summa di tutta la matematica che veniva coltivata nell'ambito dell'insegnamento dell'abaco e ci è pervenuto in tre copie la più completa delle quali è quella contenuta nel manoscritto L.IV.21 della Biblioteca degli Intronati di Siena<sup>16</sup>. Delle 500 carte che lo compongono ben 106 sono dedicate all'algebra e costituiscono i capitoli 13°, 14° e 15° del trattato. Il capitolo tredicesimo è diviso in tre parti<sup>17</sup>. La prima, nella quale l'autore espone le prime sei regole accompagnate dalle dimostrazioni geometriche, è una traduzione in volgare della prima parte della traduzione latina di Gherardo Cremonese dell'*Algebra* di al-Khwarizmi. Nella seconda l'autore introduce ulteriori potenze dell'incognita fino alla sesta e dà le regole per la loro moltiplicazione reciproca, limitandosi a quelle il cui risultato non supera la sesta potenza. Seguono regole per dividere le suddette potenze fra loro. A questo scopo Benedetto introduce le seguenti frazioni  $1/x, 1/x^2, \dots, 1/x^5, 1/x^6$  che vengono chiamate *rotto denominato di chosa, rotto denominato di censo*, etc.. Dopo aver introdotto frazioni aventi al denominatore binomi algebrici l'autore spiega come eseguire la loro somma. Questa parte termina con l'esposizione di regole per il calcolo con radicali algebrici. Nella terza parte l'autore propone una serie di 36 regole ciascuna illustrata da un semplice problema. Le regole comprendono le 6 già considerate ed altre che ad esse si riducono e regole relative ad equazioni binomie fino al sesto grado. Il capitolo quattordicesimo presenta i *chasi exenplari alla reghola dell'algebra secondo che scrive Maestro Biaggio*<sup>18</sup>. Nel quindicesimo capitolo vengono presentati nell'ordine: tutti i problemi risolti con l'algebra dal *Liber abaci* di Leonardo Pisano<sup>19</sup>, una scelta dei problemi di Giovanni di Bartolo e di Antonio de' Mazzinghi<sup>20</sup>.

RAFFAELLO CANACCI (1456-1496/1532) insegnò l'abaco a Firenze nell'ultimo quarto del XV secolo, di lui ci sono rimaste diverse versioni di un trattato d'abaco e due trattati interamente dedicati all'algebra:

<sup>15</sup> Una copia del trattato è contenuta in: Pier Maria Calandri, *Tractato d'abacho*, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Domus Galileana, Pisa, 1974.

<sup>16</sup> Per la sua descrizione si veda l'articolo di G. Arrighi citato nella nota n.8.

<sup>17</sup> Questa parte è interamente trascritta in: M° Benedetto da Firenze, *La reghola de algebra amuchabale*, a cura e con introduzione di Lucia Salomone, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale n°2, Università di Siena, 1982.

<sup>18</sup> Per la trascrizione di questo capitolo vedi nota 10.

<sup>19</sup> Questa parte è pubblicata in: Leonardo Pisano, *E chasi della terza parte del XV capitolo del Liber abaci*, a cura e con introduzione di Lucia Salomone, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale n°10, Università di Siena, 1984.

<sup>20</sup> Per la trascrizione dei casi di questi ultimi due autori vedi note 12 e 13.

- *I ragionamenti d'algebra* (codice Pal. 567 della Biblioteca Nazionale di Firenze)<sup>21</sup>
- *Vilume d'argibra* (codice Ricc. 2265 della Biblioteca Riccardiana di Firenze)

I trattati non presentano sostanziali novità, sono infatti un compendio di quanto già noto. L'autore poi dimostra scarso senso critico in quanto presenta anche regole sbagliate per la risoluzione di equazioni di terzo grado non riducibili a quelle di secondo che si tramandavano dagli inizi del secolo precedente, ma che autori più avveduti come Benedetto e Luca Pacioli avevano riconosciuto come errate.

GIOVANNI DEL SODO (1419/23-1500/18), di alcuni anni più anziano di Maestro Benedetto, ebbe una vita molto lunga ed una intensa attività di abachista che si protrasse fino agli albori del 1500 come risulta dalle *Ricordanze* di Tribaldo dei Rossi, membro di una importante famiglia fiorentina, il cui figlio fu allievo dell'abachista considerato, all'epoca, "el migliore maestro d'abaco di Firenze". Attualmente non conosciamo trattati a lui riconducibili, ma abbiamo alcune testimonianze indirette del fatto che egli praticasse l'algebra. Il suo nome infatti viene spesso menzionato da Francesco Galigai il quale in particolare gli attribuisce il modo da lui seguito per rappresentare l'incognita e le sue potenze mediante una combinazione di quadrati e rettangoli. Ma lo cita anche in relazione alla risoluzione di alcuni quesiti. Troviamo menzione di Giovanni del Sodo anche in un'opera manoscritta di Luca Pacioli conservata presso la Biblioteca Apostolica Vaticana, dove gli viene attribuito il seguente problema

Trovame 3 numeri proportionali tali che el quadrato del terzo sia uguale alla somma dei quadrati degli altri doi e multiplichare el primo numero nel secondo faccia 10. Dimando che sia ciascun numero. <Vat. Lat. 3129, c.359 v.>

Il problema ha una risoluzione abbastanza laboriosa che porta all'equazione

$$x^8 + 100x^4 = 10000.$$

FRANCESCO GALIGAI (c.1500-1537), allievo di Benedetto, insegnò l'abaco assieme a Giuliano Bonaguida come è attestato da un contratto stipulato il 30 novembre 1519 che sanciva la costituzione della società e che è ancora conservato nell'Archivio di Stato di Firenze. Egli è autore di una *Summa de arithmetica* stampata a Firenze nel 1521. Questo trattato contiene un lungo capitolo dedicato all'algebra dove l'autore fa numerosi riferimenti a Benedetto e a Giovanni del Sodo.

---

<sup>21</sup> Angiolo Procissi, *Sui "Ragionamenti d'algebra" di Raffaello Canacci*, Atti dell'Accademia Ligure di Scienze e Lettere, 9, 1952, 55-76; Angiolo Procissi, *I Ragionamenti d'Algebra di R Canacci*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 9, 1954, 300-326, 420-451; Raffaello Canacci, *I ragionamenti D'algebra: I problemi*, a cura e con introduzione di Angiolo Procissi, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, n° 7, Università di Siena, 1983.

