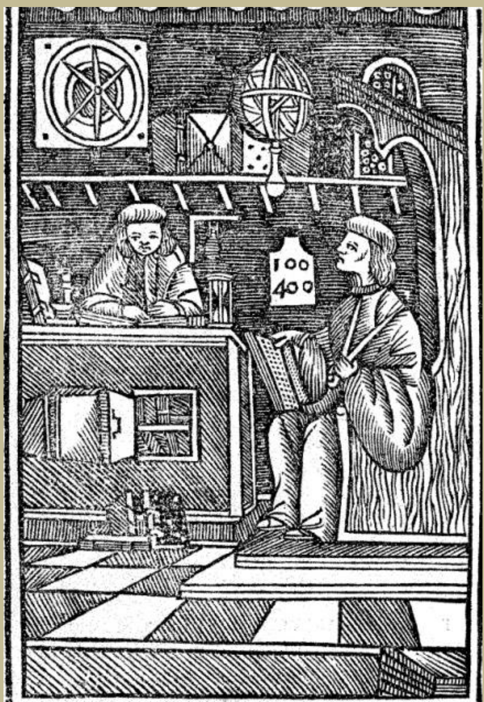
Elisabetta Ulivi

Quesiti e disfide tra maestri nelle scuole d'abaco dei secoli XIV-XVI



Firenze, 2016

Scuole pubbliche

Toscana: Siena, San Gimignano, Arezzo, Lucca, Pistoia, **Pisa**, Prato, Volterra, Colle Valdelsa, Fucecchio.

Altre località: **Verona**, Brescia, Milano, Carmagnola, Chieri, Genova, Savona, Ferrara, Modena, Bologna, **Perugia**, Città di Castello, Roma, Campania, **L'Aquila**, Calabria, Sicilia (Palermo)

Siena: Tommaso di Davizzo dei Corbizzi, Gilio di Cecco, famiglia dei Moreschi, Dionigi Gori

San Gimignano: Tommaso [di Davizzo dei Corbizzi], Iacopo, Bettino di Antonio Da Romena

Arezzo: Tommaso e Giovanni di Davizzo dei Corbizzi, Donato di Giovanni dei Danti da Arezzo, **Benedetto di Antonio da Firenze**, Marco di M° Iacopo Grassini

Lucca: Iacopo da Firenze, Gilio di Cecco, Piero di Lapo Foraboschi

Pistoia: Gilio di Cecco, Maestro Federico di Francia

Pisa: [**Leonardo Pisano**], [Dardi], Iacopo da Firenze, Miniato di Bonagio, Bonagio di Miniato, Piero di Bonagio, Tommaso di Miniato, Iacopo di Tommaso, Filippo de' Folli, Cristofano di Gherardo di Dino da Ceuli

Volterra: Iacopo dei Grassini da Campi, Marco Grassini, Giovanni Maria Grassini

Prato: Lorenzo di Biagio da Campi, Frate Mariotto di Giovanni Guiducci, Iacopo dei Grassini da Campi, Niccolò di Taddeo Micceri

Colle Valdelsa: Bettino di Antonio Da Romena

Verona: **Niccolò Tartaglia**, Francesco Feliciano da Lazise, Maffeo Poveiano

Milano: [Gabriele degli Aratori, Fazio Cardano, **Gerolamo Cardano**]

Genova: Tommaso di Miniato, Piero di Lapo Foraboschi

Modena: Altovita da Firenze, Bastiano da Pisa detto il Bevilacqua

Bologna: Scipione Dal Ferro

Perugia: Massolo o Petruzzo, Antonio di Salvestro Micceri, Niccolò di Taddeo Micceri, **Benedetto da Firenze, Luca Pacioli**

Scuole private

Venezia: **Diamante**, Dardi de Zio, Piero di Lapo Foraboschi, Girolamo e Giovanni Antonio Tagliente, Domenico Manzoni

Firenze (prima metà s. XIV- prima metà s. XVI)

Quartiere di Santa Maria Novella

Scuola di Santa Trinita (XIV-XV): Biagio, Paolo dell'abaco**,** Michele di Gianni, **Antonio di Giusto Mazzinghi, Giovanni di Bartolo.**

Scuola del Lungarno (XIV-XV): Biagio di Giovanni, Michele di Gianni, **Luca di Matteo,** Calandro di Piero Calandri**.**

Scuola dei Santi Apostoli (XIV-XVI): Michele di Gianni, Luca di Matteo, Banco di Piero Banchi, **Benedetto da Firenze,** i Micceri**.**

Scuola di Piazza dei Pilli e Scuola della Corticina dell'abaco (XV): Calandro di Piero **Calandri**, Piermaria e Filippo Maria di Calandro.

Scuola dei Ferravecchi (fine XV- inizio XVI): Giovanni del Sodo

Quartiere di Santa Croce

Scuola di Orsanmichele (XV): **Benedetto da Firenze**

Scuola della Badia (XV): Bettino da Romena

Scuola verso Borgo Pinti (XVI): Francesco di Leonardo Galigai

Quartiere di San Giovanni

Scuola di Santa Margherita (XIV): Antonio Mazzinghi, i Davizzi

Quartiere di Santo Spirito

Scuola di Borgo San Iacopo (fine XV): Raffaello di Giovanni Canacci

Anonimo, *Trattato di praticha d'arismetricha* (c.1460), BNF, Pal. 573: contiene problemi di Antonio Mazzinghi, Domenico d'Agostino vaiaio, Giovanni di Bartolo, Grazia dei Castellani, Luca di Matteo.

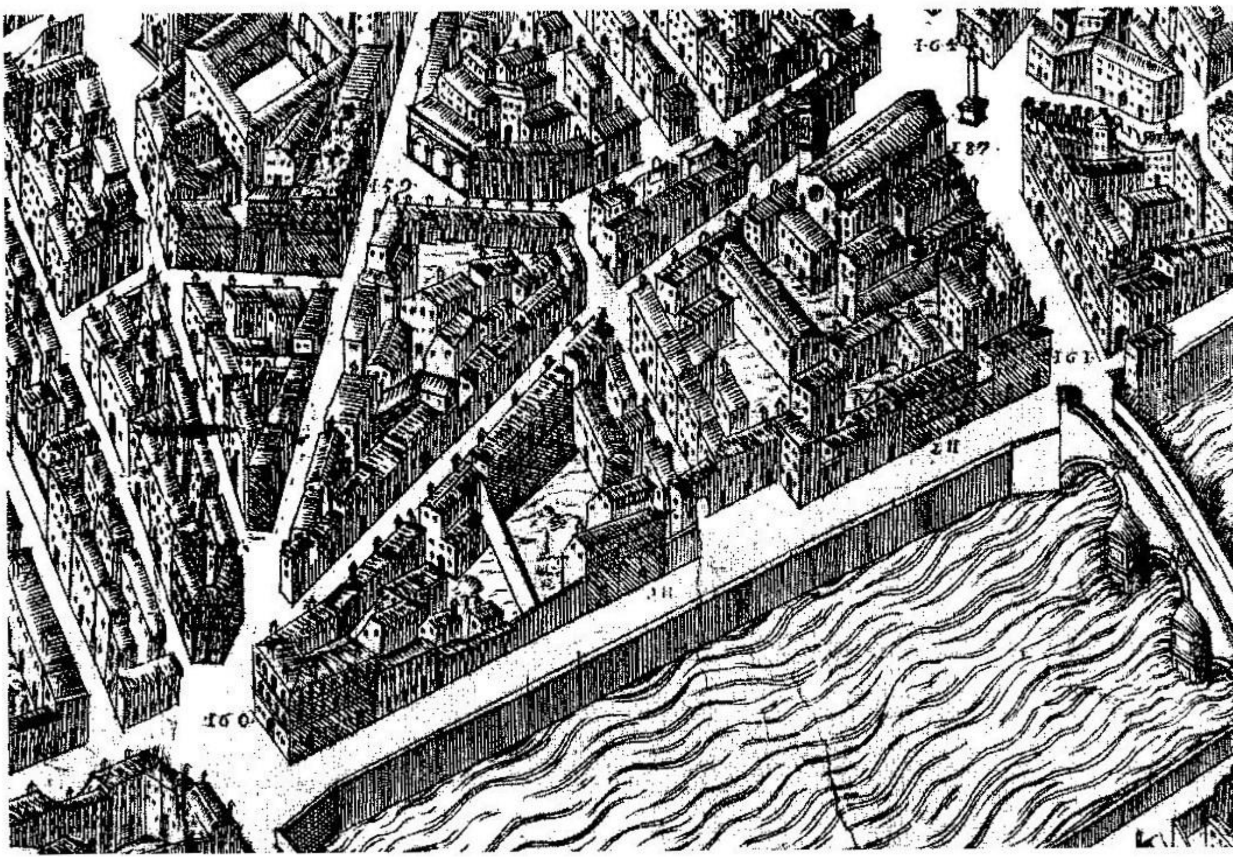
Anonimo, *Tractato di praticha di geometria* (c.1460), BNF, Pal. 577: contiene una volgarizzazione del *Liber quadratorum* di Fibonacci.

Benedetto di Antonio da Firenze, *Trattato di praticha d'arismetrica* (1463), BCS, L.IV.21: contiene la traduzione in volgare di 90 problemi dell'ultimo capitolo del *Liber abaci* e una volgarizzazione del *Liber quadratorum* di Fibonacci; raccolte di problemi di Antonio Mazzinghi, Biagio "il vecchio", Giovanni di Bartolo, Grazia dei Castellani.

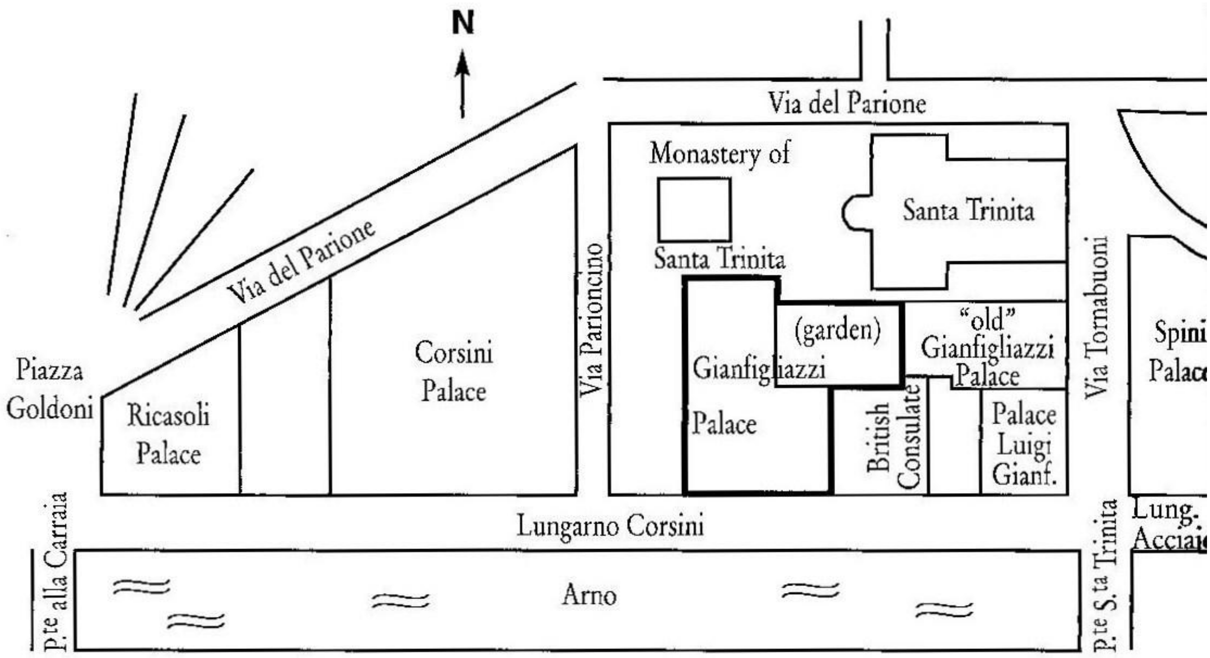
La sfida al Maestro Giovanni di Bartolo: c. 1390

Benedetto da Firenze, *Trattato di praticha d'arismetrica* (1463)

Maestro Giovanni di Bartolo inchominciò a insegnare circha **1390** e, chosì chome il suo maestro morì giovane, anchora lui giovane chominciò in questo modo. Morto il suo maestro **Antonio [Mazzinghi]**, persuaso et aiutato da certi amici di Maestro Antonio et anchora da' suoi … gli feciono aprire la medesima scuola [**Scuola di Santa Trinita**]. E per sua giovaneza pocho dagli altri che 'nsegnavano conosciuto. E benché dottissimo et chopioso di libri fusse … l'invidia che negli artefici d'un arte regnia e massime in fra quelli che insegnano al presente, in fra loro examinato in che modo si potesse levarlo di quella voluntà, presono questa via. Chonciosiachosaché per la sua età non fusse possibile che egli potesse sapere, ragunarono, ciaschuno nella loro schuola, alchuni buoni ragioniere; e' fu nella schuola di **Maestro Michele** [**Scuola dei Santi Apostoli**] … e nella schuola di **Maestro Lucha e Maestro Biagio** [**Scuola del Lungarno**] … . Et chiamato ciaschuno a ssé dissono: a noi è stato detto che un fanciullotto discepolo di Maestro Antonio à riaperto la schuola ch'egli teneva quando era in vita, e acciò che credo che fra voi sarebbe chi meglio di lui la terrebbe, io vi fo chomandamento che ogi, quando venite alla schuola, vo' n'andiate là e pigliate le **mute** vostre da llui et quando vi fate insegnare mostrategli cho' vostri arghomenti che sapete, che vada a fare altro. A' quali ubidendo i detti discepoli andarono: era in fra quelli un Tomaso Chavalchanti che era molto intendente et uno Iachopo Bordoni … . Maestro Giovanni, maravigliatosi di tanti et quali … et di diverse materie, subito stimò quel ch'era. **Nientedimeno a uno a uno chiamatogli, la materia loro che volevano mostrò … et chiarì loro in modo che stupefatti … parve loro, in quello pocho di spazio, avere più inparato che 'l resto del tempo agli altri;** onde seguitando pervennono in modo che molti di loro furono per lo' propia voluntà sopinti a dire et fare villania a' loro maestri primi, solamente avendo chonpreso la intensa invidia che gli portavono … .



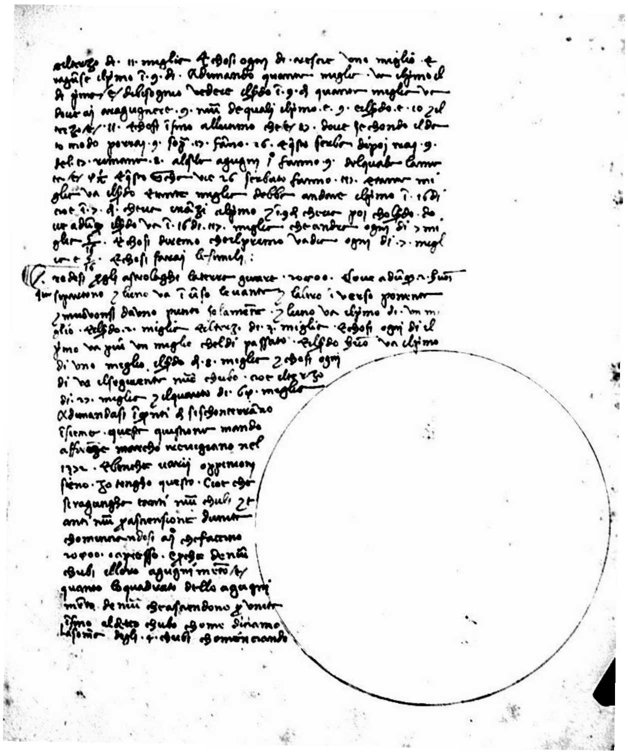
Il Palazzo Gianfigliazzi (n. 211) sul Lungarno Corsini, dove si trovava la ***Scuola del Lungarno***, in un dettaglio della carta di Stefano Buonsignori (1584)



Il Quesito di Marco trevigiano: 1372

Anonimo, *Trattato di praticha d'arismetricha* (c.1460)

Credesi, per gli astrologhi, la Terra girare 20400; dove adunque 2 huomini si partono, et l'uno va inverso levante et l'altro inverso ponente, et muovonsi da uno punto solamente. Et l'uno va, il primo dì un miglio, e il sechondo 2 miglia, e il terzo dì 3 miglia, e chosì ogni dì il primo va più un miglio che 'l dì passato. E il sechondo huomo va, il primo dì uno miglio, il sechondo dì 8 miglia, et chosì ogni dì va il seguente numero chubo, cioè il terzo dì 27 miglia et il quarto dì 64 miglia. Adimandasi in quanti dì si schonterranno insieme. Questa quistione mandò a Ffirenze Marcho trevigiano nel 1372. E benché varii oppinioni sieno, io tengho questo, cioè ...



Indichiamo con n i giorni richiesti, con $P_1(n)$ e $P_2(n)$ i percorsi dei due uomini:

$$P_1(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$P_2(n) = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$$

Deve essere

$$P(n) = P_1(n) + P_2(n) = \frac{n}{2}(n+1)\left[1 + \frac{n}{2}(n+1)\right] = 20400$$

L'autore osserva che $P(16) = 18632$ e $P(17) = 23561$

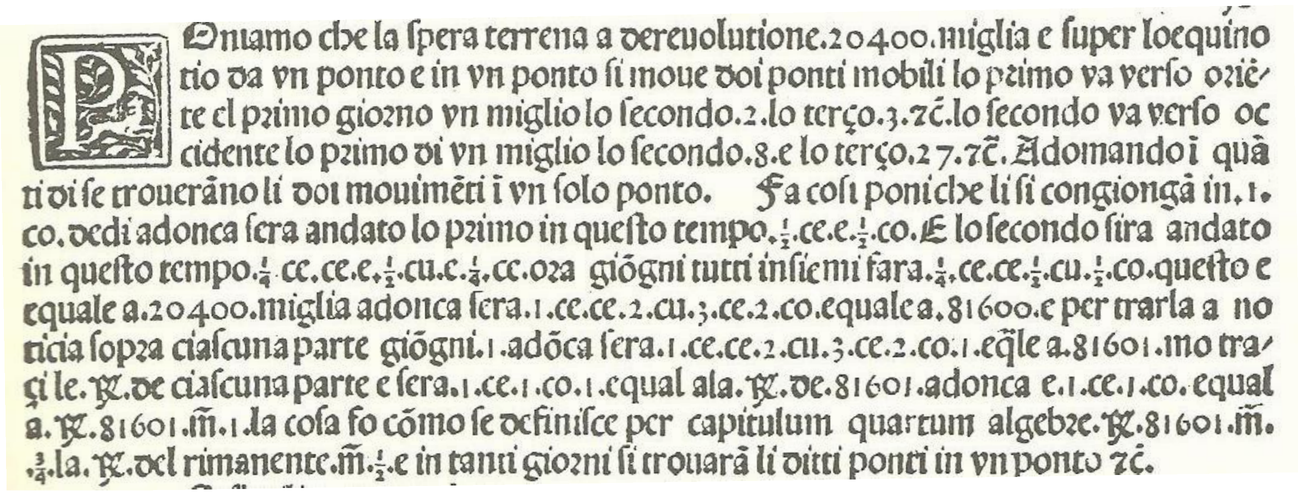
Quindi $n = 16 + f$ dove

$$f = \frac{20400 - P(16)}{P(17) - P(16)} = \frac{1768}{4930} \quad \Rightarrow \quad n = 16 + \frac{1768}{4930} \quad \left(n = 16\,\frac{1768}{4930}\right)$$

In seguito

Luca Pacioli, ***Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*** (1494, 1523):
Risolve il problema per via algebrica

Fa' così, poni che li si congionga in 1co. $\rightarrow$ **x**


Poniamo che la spera terrena a de reuolutione.20400.miglia e super lo equinotio da vn ponto e in vn ponto si moue doi ponti mobili lo primo va verso oriē te el primo giorno vn miglio lo secondo.2.lo terço.3.7c.lo secondo va verso occidente lo primo di vn miglio lo secondo.8.e lo terço.27.7c. Adomando i quā ti di se trouerāno li doi mouimēti ī vn solo ponto. Fa cosi poni che li si congiongā in.1.co. dedi adonca sera andato lo primo in questo tempo.$\frac{1}{2}$.ce.e.$\frac{1}{2}$.co. E lo secondo sira andato in questo tempo.$\frac{1}{4}$.ce.ce.e.$\frac{1}{2}$.cu.e.$\frac{1}{4}$.ce.ora giōgni tutti insieme fara.$\frac{1}{4}$.ce.ce.$\frac{1}{2}$.cu.$\frac{1}{2}$.co.questo e equale a.20400.miglia adonca sera.1.ce.ce.2.cu.3.ce.2.co.equale a.81600.e per trarla a noticia sopra ciascuna parte giōgni.1.adōca sera.1.ce.ce.2.cu.3.ce.2.co.1.eq̄le a.81601.mo tragi le.R.de ciascuna parte e sera.1.ce.1.co.1.equal ala.R.de.81601.adonca e.1.ce.1.co.equal a.R.81601.m̄.1.la cosa fo cōmo se definisce per capitulum quartum algebre.R.81601.m̄.$\frac{3}{4}$.la.R.del rimanente.m̄.$\frac{1}{2}$.e in tanti giorni si trouarā li ditti ponti in vn ponto 7c.

$P_1(x) = (x+1)\,\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ $\quad$ $P_2(x) = (x^2 + 2x + 1)\,\frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$

$P(x) = P_1(x) + P_2(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} = 20400$ ossia

$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 81600$

che aggiungendo uno ad entrambi i membri diventa

$(x^2 + x + 1)^2 = 81601$

$x^2 + x = \sqrt{81601} - 1$

$x = \sqrt{\sqrt{81601} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$

Girolamo Cardano, ***Practica arithmetice*** (1539)

Niccolò Tartaglia, ***General trattato***, Parte II (1556)

Mettono in evidenza l' "errore" di Frate Luca proponendo in alternativa il metodo risolutivo già esposto nel codice Pal. 573.

HIERONIMI C.CARDANI MEDICI MEDIOLANENSIS, PRACTICA ARITHmetice, & Mensurandi singularis. In qua que preter alias cõtinentur, versa pagina demonstrabit.

LA SECONDA PARTE DEL GENERAL TRATTATO DI NVMERI, ET MISVRE DI NICOLO TARTAGLIA, NELLAQVALE IN VNDICI LIBRI SI NOTIFICA LA PIV ELLEVATA, ET SPECVLATIVA PARTE DELLA PRATICA Arithmetica, laqual è tutte le regole, & operationi praticali delle progressioni, radici, proportioni, & quantità irrationali.

MALIGNITA' NOIAR NON PVO A' FORTEZZA

Con privilegio della santità di Papa Paolo IIII. Della Illustrissima Signoria di Venetia, & dell'eccellentissimo signor Duca d'Vrbino.

In Vinegia per Curtio Troiano dei Navò. M D LVI. Appresso dell'Auttore.

Tartaglia, ***General trattato***, Parte VI (1560)

Risolve il problema per via algebrica, come Pacioli, ma sostituendo 29412 al valore 20400 in modo da ottenere l' equazione

$$(x^2 + x + 1)^2 = 117649$$

che ha soluzione $x = 18$

I Quesiti di Giovanni di Bicci e le risposte di Massolo da Perugia: 1397

Anonimo, *Trattato di praticha d'arismetricha* (c.1460)

Anonimo, *Tractato di praticha di geometria* (c.1460)

Verso il 1397 Massolo, o Petruzzo, da Perugia “huomo assai esperto in dette scienze” inviò un “trattato” contenente “10 ragioni a **Giovanni de’ Bicci de’ Medici**, le quali, il detto Giovanni, per lo tempo passato, gli aveva chieste per darle ad alchuni valenti che erano a quel tempo dimostratori, cioè tenevano in questa città schuola”.

Uno dei quesiti conteneva alcune considerazioni sulla **risoluzione di equazioni cubiche** e sembra fosse a sua volta una risposta ad una lettera inviata a Massolo da un **Maestro Diamante** che insegnava a Venezia nel 1396.

Altri quesiti riguardavano i numeri quadrati. L’anonimo autore della *Praticha di geometria* osserva che

“Nientedimeno Lionardo Pisano [nel ***Liber quadratorum***] chiaro dimostra e’ numeri quadrati avere certe nature per le quali l’asolutione delle quistioni sopra quelle trovate prestamente s’ànno”. Uno in particolare conteneva la risposta al problema seguente:

Trovare uno numero quadrato che agunto, o vero trattone, uno numero rimangha quadrato.

Si tratta del noto problema dei numeri congruo-conguenti, che si traduce nelle due equazioni indeterminate

$$x^2 + N = y^2$$

$$x^2 - N = z^2$$

dove N e x^2 , interi o razionali, sono detti rispettivamente *conguo* e *congruente*

.

Il Quesito di un maestro dell'Aquila: 1445

Benedetto da Firenze, *Trattato di praticha d'arismetrica* (1463)**:**
Chasi exenplari alla regola dell'algebra di Maestro Biagio **("il vecchio")**

Uno chomperò tra grano e orzo 10 staie, e spese nel grano 40 s. e nell'orzo 40 s., e chostogli più lo staio del grano che lo staio dell'orzo 3 s. Adimandasi quello che chostò lo staio dell'orzo e che costò lo staio del grano e quanto orzo e quanto grano chonperò. ***Farai positione che lo staio dell'orzo chostasse una chosa … .***
E nota che questo chaso fu mandato da un maestro dall'Aquila a Firenze l'anno del 1445. E perché Maestro Biagio ne scrive uno, ò voluto quello che simigliante a questo lasciare e questo scrivere, che assai è bello chaso.

x = costo dello staio dell'orzo

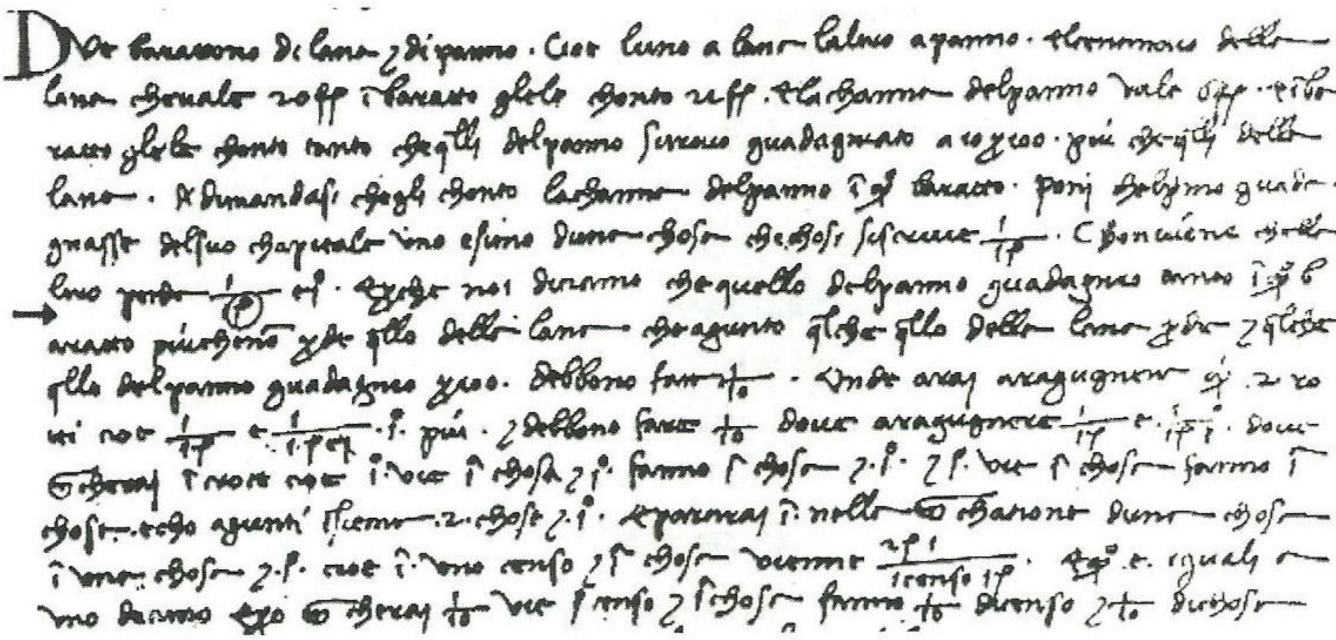
x + 3 = costo dello staio del grano

$$\frac{40}{x} + \frac{40}{x+3} = 10$$

$$\frac{80x+120}{x^2+3x} = 10$$ da cui $$x^2 = 5x + 12$$

In questo problema (ed anche in altri: *Certi chasi* di Maestro Giovanni) viene utilizzato un particolare simbolismo che coincide con quello introdotto da **Antonio Mazzinghi** nel ***Trattato di fioretti*** dove

$$\frac{1}{x} = \textit{uno esimo d'una chosa}$$



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{1}{10}$$

Un Quesito di Giovanni del Sodo: 1480

Luca Pacioli, *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos* (1477-1480), BAV, Vat. Lat. 3129

Trovame 3 numeri proportionali ch' el quadrato del terzo sia uguale a la summa di quadrati degli altri doi, e multiplichare el primo numero nel secondo facia 10; dimando che fia ciascun numero per sé. Sapi questa esser bona domanda, e a dì 4 aprile 1480 me fo mandata da Firenza da Maestro Giovani Sodi per le mani de Giovan Giacopo orafo de Peroscia e facemmoli resposta aprobatissima e ancho a cert'altre, e mandammoli al'incontro altre domande de le qual finora non abiam resposta etc.

$$a : b = b : c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$ab = 10$$

Il problema è risolto da **Leonardo Pisano**

nel XV capitolo del ***Liber abaci*** (1201/02)

Sia Fibonacci che Pacioli assumono $a = x$

da cui $b = \dfrac{10}{x}$ $c = \dfrac{100}{x^3}$ $\Rightarrow$

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10000}{x^6}$$

$x^{10} + 100x^6 = 10000x^2$ **$100^{\square\triangle}$ più $1^{\square\oslash}$ equale a $10000^{\square}$**

$x^9 + 100x^5 = 10000x$ **$100^{\oslash}$ *pi*ù $1^{\triangle\triangle}$ equale a 10000^{co}**

$x^8 + 100x^4 = 10000$ **$100^{\square\square}$ *pi*ù $1^{\square\square\square}$ equale a 10000**

Utilizza i seguenti simboli algebrici:

$1^{co} = x \qquad 1^{\square} = x^2 \qquad 1^{\triangle} = x^3 \qquad 1^{\square\square} = x^4 \qquad 1^{\oslash} = x^5$

$1^{\square\triangle} = x^6 \qquad 1^{\square\square\square} = x^8 \qquad 1^{\triangle\triangle} = x^9 \qquad 1^{\square\oslash} = x^{10}$

Luca Pacioli , *Summa* (1494)

Scrive, ad esempio, la precedente equazione

$x^{10} + 100x^6 = 10000x^2$ nella forma

10000 ce. equali a 100 ce.cu. $\tilde{p}$ 1ce.p°.r°.

Luca Pacioli, *Divina proportione* (1509)
Libellus quinque corporum regularium: un problema sull'ottaedro

Alto locto baſe che la ſuperficie e.100. del diametro dela ſpera che il contene ſe vole cercare.

Fa coſi tu ſai che locto baſe a.8.trianguli eqlateri pero ſa de.100.8.pti ch ſira.$12\frac{1}{2}$.poi di eglie vno triágulo che la ſupfi cie ſua e.$12\frac{1}{2}$.ch ſia il ſuo lato poni che ſia p lato.1.◇.troua il cateto cioe coſi multiplica.1.◇.in ſe fa.1.□.poi multiplica meçço lato in ſe che.$\frac{1}{2}$.◇.fa.$\frac{1}{4}$.de.□.trallo de.1.□.reſta.$\frac{3}{4}$.de.□.e queſto multiplica cõ meço lato recato a ℞.che.$\frac{1}{4}$.□.fa.$\frac{3}{16}$.de.□.de.□.che eqle ad.$12\frac{1}{2}$.reca.$12\frac{1}{2}$.a ℞ fa.$156\frac{1}{4}$.pti per.$\frac{3}{16}$.de.□.de.□.neuene ℞.de ℞.$833\frac{1}{3}$.táto e il lato de tale.8.baſe cioe ℞.de ℞.$833\frac{1}{3}$.e la poſança ſua e ℞.$833\frac{1}{3}$.e la poſança del diametro dela spera che contene locto baſe e doi táti pero radoppia cómo ℞.fa.$3333\frac{1}{3}$.ε la poſança del diametro dunqua il diametro de la spera che cercamo e ℞.de ℞.$3333\frac{1}{3}$.

Caſus .25.

Francesco Galigai

Summa de arithmetica (1521)

Pratica d'arithmetica (1548, 1552)

Terzo libro

I Quesiti del Maestro Agnolo del Carmine "excessivo geometro et le risposte da me factogli e absolutogli con regole et modi aptissimi, come apieno si vedrà".

Quando vvuoi dividere 11 in tre parte continue proportionali, per sapere ciascuna parte per sé. Questa mi propose Maestro Agnolo dal Carmine non mi dicendo in che proportione se la volessi; la composi nella doppia proportione.

$$a + b + c = 11$$

$$a : b = b : c$$

Ne determina una soluzione utilizzando la *falsa posizione*:
Pone che i tre numeri siano 1, 2, 4 la cui somma è 7, quindi ricava a dalla proporzione

$1 : 7 = a : 11$ per cui

$a = 1+\frac{4}{7} = \frac{11}{7}$ $\quad$ $b = 3+\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ $\quad$ $c = 6+\frac{2}{7} = \frac{44}{7}$

In precedenza

Leonardo Pisano, ***Liber abaci*** (1201/02): Capitolo XII, Paragrafo III (semplice falsa posizione)

Fammi di 14 tre parte continue proportionali che multiplicato ciascuna contro all'altre 2, et gli avenimenti gionti insieme, faccino 112. Adomando le decte quantità.

a + b + c = 14

a : b = b : c

a (b + c) + b (a + c) + c (b + d) = 112

Dice che

$b = \frac{112}{2 \cdot 14} = 4$

Deriva dalla relazione

(*) **$2(a + b + c)\, b = a(b + c) + b(a + c) + c\,(a + b)$ con $b^2 = ac$**

Trovata b ricava le altre due dalle

a + c = 10

ac = 16

ossia ricavando a e c come soluzioni dell'equazione di secondo grado

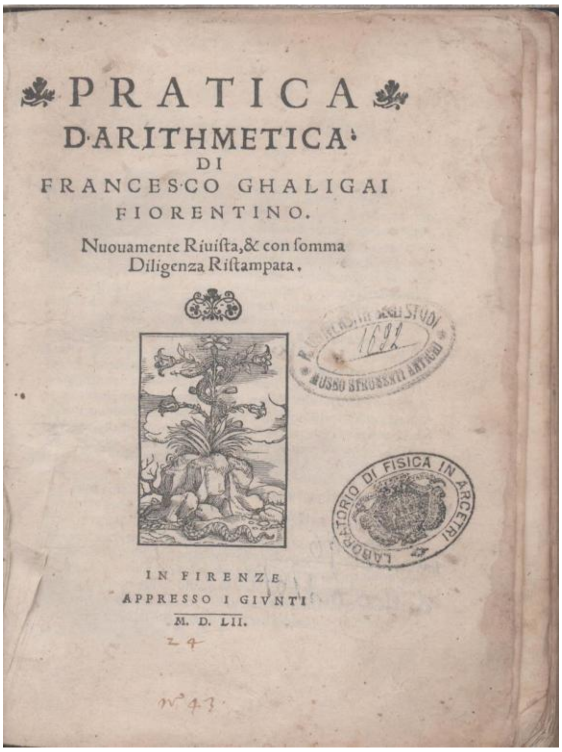
$x^2 - 10x + 16 = 0$

In precedenza utilizzano la relazione (*)

Antonio Mazzinghi, *Trattato di fioretti* (c. 1370):
Benedetto da Firenze, ***Praticha d'arismetrica***, BCS, L.IV.21 (1463)
Luca Pacioli, *Summa* (1494): Parte prima, distinzione VI, trattato VI, ***14° chiave***.

Subito per via algebrica (b = 2x)
Giovanni di Bartolo, *Questioni absolute*: ***Trattato di praticha d'arismetricha* (c.1460)**, BNF, Palat. 573 (c. 1460)

Truova 4 quantità continue proportionali che la somma della prima e quarta sia 18 et la somma della seconda e terza sia 12. Domando quanto sarà ciascuna per se solo.


PRATICA
D'ARITHMETICA
DI
FRANCESCO GHALIGAI
FIORENTINO.
Nuouamente Riuista,& con somma
Diligenza Ristampata.
IN FIRENZE
APPRESSO I GIVNTI
M. D. LII.

$a : b = b : c = c : d$

$a + d = 18$

$b + c = 12$

Galigai sfrutta la relazione

$$\mathbf{bc} = \frac{(\mathbf{b}+\mathbf{c})^3}{3(\mathbf{b}+\mathbf{c})+(\mathbf{a}+\mathbf{d})}$$

valida se $ac = b^2$ $bd = c^2$

Quindi ricava b e c come soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - (b + c)x + \frac{(b+c)^3}{3(b+c)+(a+d)} = 0$$ dunque con la formula

$$(*) \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\right)^2 - \frac{(\mathbf{b}+\mathbf{c})^3}{3(\mathbf{b}+\mathbf{c})+(\mathbf{a}+\mathbf{d})}}$$

Nel problema proposto:

$$bc = \frac{12^3}{3 \cdot 12+18} = 32$$

$$x^2 - 12x + 32 = 0$$

da cui $b = 4$, $c = 8$ e poi $a = 2$, $d = 16$

In precedenza

Anonimo, BNF, Magl. XI, 120 (c. 1400), prima dei problemi del Mazzinghi:

$a : b = b : c = c : d$

$a + d = 8 \qquad b + c = 2$

utilizza la relazione

$(b + c)^2 = (a + b)(c + d)$ con $ac = b^2$, $bd = c^2$ da cui $ad = bc$ Posto $a + b = p$ $c + d = q$ ricava p e q dalle

$p + q = 10, \quad pq = 4$

ed infine trova a, b, c, d.

Luca Pacioli, *Summa* (1494 **)**

Prima lo risolve come il Galigai (stessi dati numerici)

Dopo (con altri dati) applicando la ***prima chiave***

Ossia se

$ac = b^2$ e $bd = c^2$ allora

$(b + c) : (a + b + c + d) = b : (a + c)$

Con

$a + d = 30 \qquad b + c = 25$

Da cui

$25 : 55 = b : (a + c)$

Ora procede per via algebrica:

pone $b = x$ da cui

$c = 25 - x; \quad a = \frac{11}{5}x - c = \frac{16}{5}x - 25; \quad d = 30 - a = 55 - \frac{16}{5}x$

e ricava x da un' equazione di secondo grado .

Nell’*Arcibra* si dimostra maggiore cose sopra e numeri proportionali

Dimostratione di 8 figure, le quale Giovanni del Sodo pratica la sua *Arcibra*, et perché in parte terrò il suo stile le dimostrerò

plicare el ⊞ nel □, o uero della c° nel □ di □, el ⊞ di □ del ▭ quadrato, o uero del □ nel □ di □, o si dello 8 nella c°, el ⊟ del ▭ nel □ di □, o uero del □ nel 8, o si della c° nel ▭ di □, & cosi in infinito puoi seguire.

n°	Numero	1
c°	Cosa	2
□	Censo	4
▭	Cubo	8
□ di □	□ di □	16
8	Relato	32
⊞ di □	▭ di □	64
⊟	Pronico	128
□ di □ di □	□ di □ di □	256
▭ di ▭	▭ di ▭	512
8 di □	8 di □	1024
⊟	Tronico	2048
▭ di □ di □	▭ di □ di □	4096
⊞	Dromico	8192
⊟ di □	⊟ di □	16384
▭. 8	▭. 8	32768

37 TRuoua 3 quantita continue proportionale, che tratto la ℞ della prima della ℞ della terza, el rimanente multiplicato ne la ſomma delle dette 2 ℞ ne uenga la ſeconda quantita, la quale u[o]glio che ſia la ℞ dell'altre 2 domando le dette quantita, poni la ſeconda quãtita ſia 1 c°, ſeguita la ſõma della prima e terza inſieme 1 □, adunque ſra tutta 3 le quantite ſarãno 1 □ piu 1 c°. e di queſto piglia $\frac{1}{2}$ che e' $\frac{1}{2}$ □ e $\frac{1}{2}$ c°, el quale habbiano a dire che ſia la terza quãtita direno che la terza quantita ſara' $\frac{1}{2}$ □ e $\frac{1}{2}$ c°, & tanto reſta la ſomma della ſeconda e prima, & perche ponemo la ſeconda 1 c° reſta la prima $\frac{1}{2}$ □ meno $\frac{1}{2}$ co. hora perche le dette 3 quãtita ſono nella continua proportione, per la 57 del terzo, tanto fa a multiplicare la ſeconda in ſe, quanto la prima nella terza, però multiplica la prima nella terza fa $\frac{1}{4}$ di □ di □ m̃. $\frac{1}{4}$ di □ e queſto e' equale al quadrato della ſeconda cio e' a 1 □, raguagliato le parte harai poi $\frac{1}{4}$ di □ di □ che ſeguẽdo l'ordine della 157 di 10, trouerrai ualer̃ la c° ℞ di 5, tãto fu la ſecõda quãtita, e la prima fu 2 $\frac{1}{2}$ m° ℞ di 1 $\frac{1}{4}$ e la terza fu 2 $\frac{1}{2}$ p. ℞ di 1 $\frac{1}{4}$.

S. 1 co. P. 1 □ 1 □ e 1 co. [2

$\frac{1}{2}$ □ e $\frac{1}{2}$ co. T. T. $\frac{1}{2}$ □ e $\frac{1}{2}$ co.

$\frac{1}{2}$ □ m̃. $\frac{1}{2}$ co. 1 co.

$\frac{1}{4}$ □ di □ m̃. $\frac{1}{4}$ di □ – 1 □ P. $\frac{1}{2}$ □ m̃ $\frac{1}{2}$ co.

1

$\frac{1}{4}$ □ di □ – 1 $\frac{1}{4}$ di □ La prima 2 $\frac{1}{2}$ m̃. ℞ 1 $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ □ ––––– 1 $\frac{1}{4}$ ñ. La ſeconda ℞ 5

℞ 5 uale la co. La Terza 2 $\frac{1}{2}$ piu ℞ 1 $\frac{1}{4}$

& la proportione e ℞ 1 $\frac{1}{4}$ piu ℞ $\frac{1}{4}$.

Seconda quantità: x

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2 = x^2$$

$$\frac{1}{4}x^4 = 1\frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{1}{4}x^2 = 1\frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{5}$$

Bibliografia

ULIVI ELISABETTA, *Scuole e maestri d'abaco in Italia tra Medioevo e Rinascimento*, in *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, a cura di Enrico Giusti e con la collaborazione di Raffaella Petti, Firenze, Edizioni Polistampa, 2002, pp. 121-159. Reperibile sul sito de «Il Giardino di Archimede».

ULIVI, ELISABETTA, *Masters, questions and challenges in the abacus schools*, «Archive for History of Exact Sciences», 69, 6, 2015, pp. 651-670.