LA MATEMATICA DI DOMANI

Carlo Cellucci

carlo.cellucci@uniroma1.it

POINCARÉ, *IL FUTURO DELLA MATEMATICA* (1908)

“Il giusto metodo per prevedere il futuro della matematica è quello di studiarne la storia e lo stato attuale”

- Fino al Cinquecento → numero, forma
- Calcolo infinitesimale → moto, cambiamento

DE L'HOSPITAL, *ANALYSE DES INFINIMENT PETITS POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES* (1696)

- **ASSIOMA 1:** "Si richiede che si possano prendere indifferentemente l'una per l'altra due quantità che non differiscono tra loro che per una quantità infinitamente piccola".

- infinitesimi = 0

- **ASSIOMA 2:** "Si richiede che una linea curva possa essere considerata come la giustapposizione di un'infinità di linee rette, ciascuna infinitamente piccola".

- infinitesimi $\neq$ 0

Scuola di Göttingen

Matematica → formulazione di concetti astratti e relazioni

Oggetti matematici → portatori di proprietà concettuali

Dimostrazione → deduzione logica da concetti

Filosofie della matematica del Novecento

PRIMO NOVECENTO

Logicismo (Frege, Russell)

Formalismo (Hilbert)

Intuizionismo (Brouwer)

SECONDO NOVECENTO

Neologicismo (Wright, Hale)

Platonismo (Gödel)

Implicazionismo (Putnam)

Strutturalismo (Bourbaki, Shapiro, Resnik)

Finzionalismo (Field)

Internalismo (Maddy)

Costruttivismo (Bishop)

Congetturalismo (Lakatos)

Empirismo (Kitcher)

Cognitivismo (Lakoff, Núñez)

STRUTTURALISMO
(Bourbaki, Shapiro, Resnik)

- **Matematica:** studio deduttivo delle strutture.

- **Struttura:** ciò che si ottiene da un insieme di oggetti considerando solo le relazioni tra gli oggetti, dunque ignorando ogni loro carattere che non incida sul modo in cui essi stanno in relazione tra loro.

- **Esempio:** nel caso della struttura dei numeri naturali, l'unica cosa che importa sui numeri naturali è la relazione in cui stanno l'uno con l'altro.

- **Studio deduttivo delle strutture:** il processo che consiste nel formulare assiomi per una struttura e nel dedurre conseguenze da essi.

I

- **Strutturalismo:** studio deduttivo delle strutture.

- Il lavoro in vari campi della matematica, come la teoria dei numeri e la teoria delle equazioni differenziali parziali, **non** consiste nel formulare assiomi per una struttura e dedurre conseguenze da essi.

- **Esempio:** lavoro su questioni come la distribuzione dei numeri primi o la trascendenza di π.

II

- **Strutturalismo:** scambia per natura della matematica quella che è solo una caratteristica di una particolare scuola, la **scuola di Göttingen**.

- Tale scuola, attraverso l'opera di **Van der Waerden**, *Moderne Algebra*, influenzò anche **Bourbaki**.

- Per la sua astrattezza e mancanza di contatto con la realtà, negli ultimi decenni del Novecento il tipo di matematica che si può far risalire a tale scuola ha attraversato una crisi profonda.

- Il 28 Aprile 1998 il quotidiano francese *Liberation* pubblicò un articolo dal significativo titolo: 'Bourbaki è morto, QED'.

III

- **Strutturalismo:** ha avuto effetti negativi sullo sviluppo della matematica.

- Ha portato a trascurarne intere parti, e a considerare la matematica un’attività autoreferenziale, separata dalla realtà fisica.

Dieudonné

- “Tra tutti i sorprendenti progressi” della matematica recente, “neppure uno” ha “avuto nulla a che fare con le applicazioni fisiche”

- “Persino nella teoria delle equazioni differenziali parziali, l’accento viene posto oggi molto di più su problemi strutturali ‘interni’ che su questioni aventi un significato fisico diretto.”

IV

- **Strutturalismo:** non sa dare una nozione primitiva di struttura.
- Definisce il concetto di struttura a partire da quello di insieme.
- Così il concetto primitivo è quello di insieme, non quello di struttura.
- Questo implica che la matematica non è lo studio delle strutture.
- Ma questa è la fine dello strutturalismo.

- **Shapiro:** sviluppa una teoria assiomatica delle strutture che dovrebbe essere indipendente dalla teoria degli insiemi.
- Ma essa è del tutto simile alla teoria degli insiemi.

Shapiro

- L’ambito “degli insiemi e l’ambito delle strutture sono poco più che varianti notazionali l’uno dell’altro”.
- Perciò “tutto ciò che può essere detto di uno dei due ambiti può essere trasferito all’altro”.
- Ma allora il concetto di struttura non è indipendente da quello di insieme.

V

- **Strutturalismo:** non sa dire sotto quali condizioni esiste una struttura.

- **Matematica:** consiste nel formulare assiomi per una struttura e nel dedurre conseguenze da essi.

- Ma sotto quale condizione esiste una struttura che soddisfa gli assiomi ?

Shapiro

- Gli assiomi devono essere “un gruppo di enunciati coerente”.

- ‘**Coerente**’ non può essere inteso nel senso della **nozione sintattica di coerenza:** dagli assiomi non si possono dedurre contraddizioni.

- Una deduzione è una successione di stringhe di simboli, e la struttura delle stringhe di simboli è isomorfa alla struttura dei numeri naturali.

- Perciò la coerenza nel senso della nozione sintattica di coerenza è un fatto relativo alla struttura dei numeri naturali.

- Ma allora dire, ad esempio, che la struttura dei numeri naturali esiste sotto la condizione che dagli assiomi dell’aritmetica di **Peano** del secondo ordine non siano deducibili contraddizioni, equivale a dire che la struttura dei numeri naturali esiste sotto la condizione che la struttura dei numeri naturali esista.

- Questo porta a un circolo vizioso.

- ‘**Coerente**’ non può essere inteso neppure nel senso della **nozione semantica di coerenza:** gli assiomi hanno un modello.

- Dire che gli assiomi sono coerenti nel senso della nozione semantica di coerenza, equivale a dire che una struttura che soddisfa gli assiomi esiste sotto la condizione che una struttura che soddisfa gli assiomi esista

- Questo di nuovo porta a un circolo vizioso.

Shapiro

- Questo circolo “può non essere vizioso”.
- Una struttura che soddisfa gli assiomi esiste sotto la condizione che essa possa essere modellata “nella gerarchia degli insiemi”.
- Questa “è così grande che pressoché qualsiasi struttura può essere modellata o esemplificata in essa”.
- Dunque una struttura che soddisfa gli assiomi esiste sotto la condizione che la sua esistenza possa essere dimostrata nella teoria degli insiemi.
- Ma questo fa nascere il problema: la teoria degli insiemi è coerente?

Shapiro

- "Non possiamo giustificare la coerenza della teoria degli insiemi modellandola nella teoria degli insiemi".
- Tuttavia "la coerenza della teoria degli insiemi è presupposta da molta dell'attività fondazionale della matematica contemporanea".
- "A ragione o a torto, la matematica presuppone che la soddisfacibilità (nella gerarchia degli insiemi) sia sufficiente per l'esistenza" di una struttura.
- "Gli strutturalisti accettano questo presupposto e ne fanno uso come chiunque altro, e non sono in una posizione migliore (e neppure peggiore) per giustificarlo".
- L'argomento di **Shapiro** è simile all'argomento che dobbiamo accettare l'esistenza di Dio perché è presupposta dall'esistenza del mondo.

VI

- Non sa specificare un'unica struttura come oggetto dell'aritmetica.
- In base a esso si devono distinguere teorie come l'aritmetica da teorie come la teoria dei gruppi. Le prime hanno per oggetto un'unica struttura, le seconde no.
- Questa distinzione, però, è superficiale per varie ragioni.
- **In primo luogo**, l'affermazione che una teoria come l'aritmetica ha per oggetto un'unica struttura si basa sul fatto che l'**aritmetica di Peano** del secondo ordine è categorica, cioè tutti i suoi modelli pieni sono isomorfi alla struttura dei numeri naturali e perciò sono isomorfi tra loro.
- Ma l'**aritmetica di Peano** del secondo ordine ha anche modelli non pieni che non sono isomorfi alla struttura dei numeri naturali.
- Quindi non è vero che tutti i suoi modelli sono isomorfi.

- **In secondo luogo**, l'**aritmetica di Peano** del secondo ordine è categorica solo relativamente a un dato modello della teoria degli insiemi.

- Cioè, non tutti i modelli pieni dell'**aritmetica di Peano** del secondo ordine sono isomorfi, ma solo quelli appartenenti a uno stesso modello della teoria degli insiemi.

- Quindi l'**aritmetica di Peano** del secondo ordine è categorica solo relativamente a un dato modello della teoria degli insiemi.

- **In terzo luogo**, modelli isomorfi tra loro non sono realmente la stessa struttura.

Shapiro

- “Poiché modelli isomorfi sono equivalenti, le proprietà rilevanti di ogni modello dell’assiomatizzazione sono le stesse, e perciò, in un certo senso, ogni modello va altrettanto bene di qualsiasi altro.”.
- “Possiamo studiare la struttura studiando una sua esemplificazione”.
- Perciò, tutto ciò che possiamo sapere sulla struttura dei numeri naturali possiamo saperlo considerando una qualsiasi sua esemplificazione.

- Definizione di **Zermelo** dei numeri naturali: i numeri naturali 0, 1, 2, 3, … sono gli insiemi:

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

- Definizione di **von Neumann** dei numeri naturali: i numeri naturali 0, 1, 2, 3, … sono gli insiemi:

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

- Queste definizioni forniscono due esemplificazioni della struttura dei numeri naturali.

- Perciò, in base a quanto afferma **Shapiro**, tutto ciò che possiamo sapere sulla struttura dei numeri naturali considerando una di queste due esemplificazioni possiamo saperlo considerando l'altra.

- Ma per lo strutturalismo l’unica cosa che importa riguardo a una data struttura sono le relazioni in cui gli oggetti stanno tra loro.
- In particolare, l’unica cosa che importa riguardo alla struttura dei numeri naturali, è la relazione in cui i numeri naturali stanno tra loro.
- Perciò, nelle esemplificazioni della struttura dei numeri naturali di **Zermelo** e **von Neumann**, in cui i numeri naturali sono identificati con certi insiemi, l’unica cosa che importa riguardo alla struttura dei numeri naturali è la relazione di appartenenza,
- Questa è infatti la relazione in cui i numeri naturali stanno tra loro in tali esemplificazioni.

- Ma la relazione di appartenenza ha proprietà differenti nelle due esemplificazioni.
- Così, nell'esemplificazione di **von Neumann:**

$$1 \in 3$$

- Infatti

$$\{\varnothing\} \in \left\{\varnothing, \{\varnothing\}, \left\{\varnothing, \{\varnothing\}\right\}\right\}$$

- Invece, nell'esemplificazione di **Zermelo:**

$$1 \notin 3$$

- Infatti

$$\{\varnothing\} \notin \left\{\left\{\{\varnothing\}\right\}\right\}$$

- Perciò le definizioni di **Zermelo** e **von Neumann** non possono considerarsi entrambe esemplificazioni della struttura dei numeri naturali

APPROCCIO TOP DOWN E BOTTOM UP

- **Approccio top down**: cerca di applicare la matematica già nota a campi non matematici
- **Approccio bottom up**: parte dalle argomentazioni che vengono usate in campi non matematici e cerca di renderle matematiche, trasformandole in nuova matematica

- **Approccio top down:** porta all'uso di modelli matematici che riflettono solo rozzamente il campo di applicazione perché trascurano molto della sua complessità.
- **Esempio:** attuali modelli matematici per l'economia.
- Modelli matematici non sviluppati a partire dal campo di applicazione bensì a partire da altra matematica.
- **Approccio bottom up:** sviluppa nuova matematica a partire da campi non matematici cercando di rispecchiarne tutta la complessità.
- Infatti, sviluppa una trattazione matematica a partire da argomentazioni non matematiche.

- **Esempio: Newton** e il calcolo infinitesimale.

Punto di partenza di Newton

- “Io considero le quantità matematiche” come “descritte da un moto continuo”.
- “Le linee sono descritte, e descrivendole vengono generate” attraverso “il moto continuo di punti, le superfici attraverso il moto di linee, i solidi attraverso il moto di superfici, gli angoli attraverso la rotazione di lati, il tempo attraverso il flusso continuo, e similmente negli altri casi”.
- “Queste generazioni hanno luogo nella natura fisica”.
- **Newton** sviluppa “un metodo per determinare le quantità in termini delle velocità del moto o incremento con cui esse sono generate”, e chiama “queste velocità del moto o incremento ‘flussioni’ ”.

- Per esempio, per determinare la flussione della quantità x^n, **Newton** procede così:
- "Si faccia fluire la quantità x uniformemente".
- "Nel tempo in cui la quantità x fluendo diventa $x+o$, la quantità x^n diverrà $(x+o)^n$".
- Sviluppando quest'ultima egli stabilisce che la flussione o velocità di incremento della **quantità fisica** x^n rispetto a x è nx^{n-1}.
- Da ciò egli conclude che la flussione o velocità di incremento della **quantità matematica** x^n rispetto a x è nx^{n-1}.
- Così **Newton** trasforma argomentazioni del campo della fisica in nuova matematica.

METODI CORRISPONDENTI AGLI APPROCCI *TOP DOWN* E *BOTTOM UP*

- All'approccio ***top down*** corrisponde il **metodo assiomatico**.
- Questo è il metodo in base al quale si assumono alcune asserzioni come punti di partenza assoluti per le dimostrazioni, o assiomi, e si deducono conseguenze da esse.
- Gli assiomi richiedono un qualche tipo di giustificazione, che viene di solito individuata nel fatto che essi sono **veri**, **in un qualche senso di 'vero'.**
- Uno dei sensi di vero più popolari è quello secondo cui 'vero' significa '**coerente**'.
- Da tale punto di vista gli assiomi sono giustificati se si può dimostrare che essi sono coerenti.

Bourbaki

- La matematica consiste “unicamente nella deduzione logica a partire da premesse poste arbitrariamente mediante gli assiomi”.

- L’unico requisito che deve essere soddisfatto dagli assiomi è la coerenza, perché “la mancanza di contraddizioni è stata considerata in tutti i tempi come la *conditio sine qua non* di tutta la matematica”.

- All’approccio ***bottom up*** corrisponde il **metodo analitico**.

- Questo è il metodo in base al quale, per risolvere un problema, si formula, mediante un’inferenza non deduttiva a partire dal problema, un’ipotesi che è una condizione sufficiente per la sua soluzione, e si controlla che essa sia plausibile, cioè compatibile con i dati esistenti.

- L’ipotesi costituisce a sua volta un problema che deve essere risolto, e viene risolto nello stesso modo.

- Cioè, si formula, mediante un’inferenza non deduttiva a partire dall’ipotesi, un’altra ipotesi che è una condizione sufficiente per la soluzione del problema costituito dall’ipotesi precedente, e si controlla che essa sia plausibile. E così via.

Newton

- “Le proposizioni del seguente libro”, i *Principia Mathematica*, “furono trovate attraverso l’analisi” .
- Questo è il metodo dei “matematici degli ultimi tempi” i quali “hanno molto migliorato l’analisi” .
- Essi “si fermano lì” poiché pensano “di aver risolto un problema” quando ne hanno dato una soluzione con quel metodo.
- “In questo modo il metodo della sintesi”, cioè il metodo assiomatico, “è quasi messo da parte”.

FILOSOFIA DELLA MATEMATICA ‘MAINSTREAM’

- L’attività matematica consiste nel dedurre teoremi da assiomi.
- La logica matematica è il principale e strumento per spiegare perché la matematica è conoscenza.
- Essa, infatti, fornisce il modello dell’attività matematica, e mostra che essa è ben fondata e stabilisce delle verità.

- La **filosofia della matematica ‘mainstream’** non dà una risposta univoca alla domanda di che cosa si occupi la matematica.
- Secondo alcuni suoi rappresentanti, la matematica si occupa di oggetti in un cielo platonico, secondo altri si occupa di strutture, e così via.
- Ma tutti i suoi rappresentanti sono concordi nell’affermare che la logica matematica svolge un ruolo decisivo nello spiegare la natura della matematica.

FILOSOFIA DELLA MATEMATICA ‘MAVERICK’

- L’attività matematica consiste nel risolvere problemi con una molteplicità di metodi.

- Tutti tali metodi, comunque, usano come mezzo di scoperta di ipotesi per la soluzione di problemi inferenze non-deduttive.

- Il modello dell'attività matematica come deduzione di teoremi da assiomi non corrisponde all'effettivo procedere dei matematici, fornisce un'immagine falsata della matematica e ne impoverisce radicalmente il contenuto omettendone aspetti essenziali.

- Inoltre la logica matematica non è in grado di dimostrare la verità degli assiomi né è in grado di giustificare la scelta dei concetti primitivi.

- Questo appare chiaro dai risultati limitativi – dai teoremi di incompletezza di **Gödel**, al teorema di indefinibilità della verità di **Tarski**, ai teoremi di indecidibilità di **Church**.

- Anche la **filosofia della matematica 'maverick'**, però, non dà una risposta univoca alla domanda con quali metodi si risolvono i problemi matematici, anzi talvolta dà risposte contrastanti tra loro.

PROMEMORIA
PER LA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA
DI DOMANI

- Lo scopo della filosofia della matematica non è essenzialmente diverso da quello della matematica. Essa, infatti, mira a far progredire la conoscenza matematica.

- La principale questione della filosofia della matematica non può essere quella del fondamento della matematica.

- La filosofia della matematica deve render conto di tutti gli aspetti dell’attività matematica.

CARATTERI DELLA MATEMATICA
E DELLA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA
DI DOMANI

- Approccio bottom up
- Matematica ed esperienza
- Matematica e soluzione di problemi
- Matematica ed evoluzione
- Matematica e strutture cognitive
- Matematica e sviluppo storico
- Matematica e verità

APPROFONDIMENTI

- Chi fosse interessato ad approfondire alcune delle idee qui presentate può guardare questi miei scritti:
- *Filosofia e matematica*, Laterza, Roma-Bari 2002.
- *La filosofia della matematica del Novecento*, Laterza, Roma-Bari 2007.
- *Perché ancora la filosofia*, Laterza, Roma-Bari 2008.
- Why Proof? What is a Proof?, in R. Lupacchini & G. Corsi (eds.), *Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof*, Springer, Berlin 2008, pp. 1-27,
- Indiscrete Variations on Gian-Carlo Rota's Themes, in E. Damiani, O. D'Antona, V. Marra, F. Palombi (Eds.), *Combinatorics to Philosophy. The Legacy of G. C. Rota*, Springer, New York 2009, pp. 211-228.
- Altri possono essere scaricati dal sito **w3.uniroma1.it/cellucci**