Il calcolo delle forme di Grassmann tra geometria e fisica

Maurizio Berni

22 febbraio 2012

Hermann Gunther Grassmann:
breve biografia

Fonte: Wikipedia.

Matematico tedesco

nato a Stettino il 15 aprile 1809
morto a Stettino il 26 settembre 1877

Terzo di dodici fratelli.

Il padre era ministro del culto e insegnante di matematica e fisica al liceo di Stettino.

Fu seguito nei primi anni degli studi dalla madre, donna di vasta cultura.

Entrò al liceo di Stettino, e non fu brillante nei primi anni; per suo padre sarebbe stato adatto ad un mestiere artigianale.

Si riprese fino a conseguire la maturità classificandosi secondo nella scuola.

Studiò teologia all'università di Berlino e non ebbe alcuna istruzione formale in matematica; piuttosto fu influenzato dal padre, al punto di decidere di voler fare il suo stesso lavoro (insegnante di matematica).

All’esame di abilitazione ebbe un risultato scarso, e fu abilitato solo per le classi inferiori; oltre alla matematica insegnava fisica, tedesco, latino, e religione.

Nel frattempo stava maturando le prime intuizioni della sua nuova teoria dell’estensione.

Successivamente superò gli esami di abilitazione per poter insegnare matematica, fisica, chimica e mineralogia in tutte le scuole secondarie.

Nel 1844 pubblicò la prima versione de “Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik“, ovvero:

“La Teoria lineare dell’estensione, una nuova branca della Matematica“

A seguito di ciò si rivolse al ministro prussiano per l’educazione, per poter insegnare all’Università; il ministro chiese un giodizio al matematico Kummer, che così si espresse: “(...) buon materiale espresso in forma carente“.

Grassmann non ebbe mai quell’incarico e terminò la sua carriera presso il liceo di Stettino, pur continuando la sua ricerca e la sua produzione:

- nuove versioni dell’Ausdehnunglehre

- prima formulazione di un'assiomatica dell'aritmetica

- questioni di cristallografia, elettromagnetismo, e meccanica

Fu anche un filologo riconosciuto: si dedicò alla linguistica storica, alle canzoni popolari tedesche, al Sanscrito, e ricevette una laurea ad honorem dall'Università di Tubinga.

Die Lineale Ausdehnungslehre, 1844

La grande intuizione: le grandezze *intensive* **ed** *estensive*

> *“(...) è chiaro come ogni grandezza reale può essere vista in due maniere, come intensiva e come estensiva; vale a dire, la linea si può anche vedere come grandezza intensiva se si astrae dal modo in cui si distinguono gli elementi che la costituiscono, e se ne considera la loro quantità globalmente, e, analogamente, il punto, munito di una forza, può essere pensato come una grandezza estensiva immaginando la forza rappresentata come una linea(...)“*

([G], pag. XII).

In poche parole traspare il profondo collegamento tra geometria e fisica.

Una linea, un segmento, pensato pesante in proporzione alla sua lunghezza (grandezza estensiva), può essere pensato come un punto, in cui tutto il peso è concentrato (grandezza intensiva): la posizione naturale di questo punto è il baricentro del segmento, cioè il suo punto medio, se si pensa il peso ugualmente distribuito lungo tutta la lunghezza

L'idea non è nuova: basti pensare al "Metodo meccanico" di Archimede per il calcolo di aree e volumi.

Ciò che Grassmann aggiunge all'idea di Archimede è dotare le grandezze di un segno, positivo o negativo

....un piccolo dettaglio che determina lo sprigionarsi di tutte le proprietà che fanno del calcolo geometrico una ricchissima e significativa struttura algebrica

Forme di prima specie

Si parte dai *punti*. I punti sono elementi di un insieme qualsiasi (seguendo Hilbert, punti, rette e piani potrebbero essere sostituiti da tavoli, sedie e boccali di birra...), ma possono anche essere visualizzati come i punti del piano o dello spazio ordinario

Ad ogni punto si associa una *grandezza intensiva* non nulla, che possiamo chiamare *massa*, espressa da un numero reale positivo o negativo.

Per convenzione indichiamo con P, Q, ecc. i punti P, Q, ecc. dotati di massa unitaria, e con la moltiplicazione formale λP, ecc. il punto P dotato di massa λ.

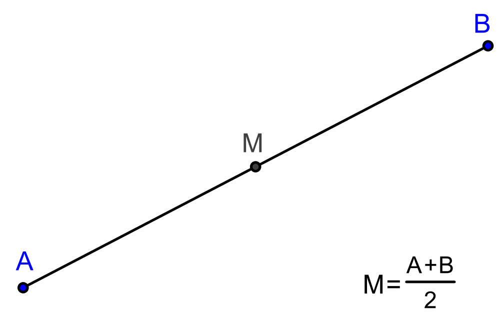
Si definisce

$$A + B = 2M$$

la somma di due punti di massa unitaria, dove M è il punto medio (nel caso astratto può essere la definizione formale di punto medio).

In altri termini

$$\frac{A+B}{2} = M$$

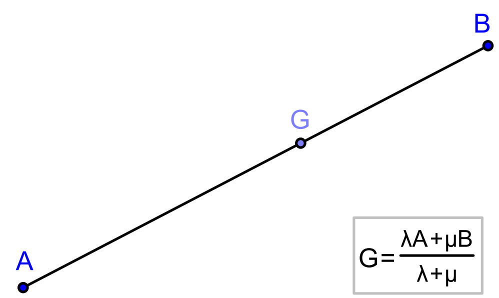


Il punto medio M è la semisomma degli estremi A e B

Più in generale

$$\lambda A + \mu B = (\lambda + \mu) G$$

dove G è il *baricentro* del sistema di due punti A e B di masse λ e μ rispettivamente.

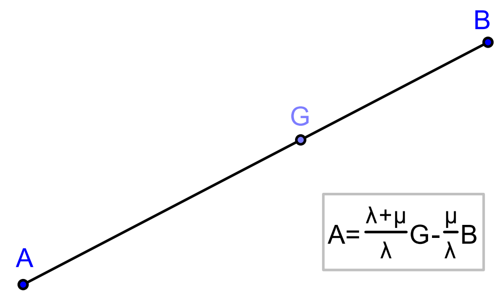


Il punto G è il baricentro di λA e μB

Ogni punto G del segmento AB è esprimibile in questo modo, per opportuni valori positivi di λ e μ, ma leggendo la stessa uguaglianza in un altro modo

$$\lambda A = (\lambda + \mu)G - \mu B$$

si esprime il punto A, *esterno* al segmento GB, come combinazione lineare dei punti G e B; il punto con il coefficiente negativo è quello più lontano.



Il punto A esterno al segmento si esprime come combinazione lineare di B e G

In altri termini, dati due punti A e B, è possibile indicare tutti i punti della retta AB mediante opportune combinazioni lineari

$$\lambda A + \mu B$$

con λ e μ numeri reali di segno qualsiasi; nel caso particolare in cui $\lambda + \mu = 1$ si ha:

$$\lambda A + (1 - \lambda) B = P$$

in questo modo si ottengono

- tutti i punti di massa unitaria del segmento AB se $0 \leq \lambda \leq 1$

- tutti i punti di massa unitaria della retta AB per λ qualsiasi

Si possono considerare queste come definizioni formali di *segmento* e di *retta*

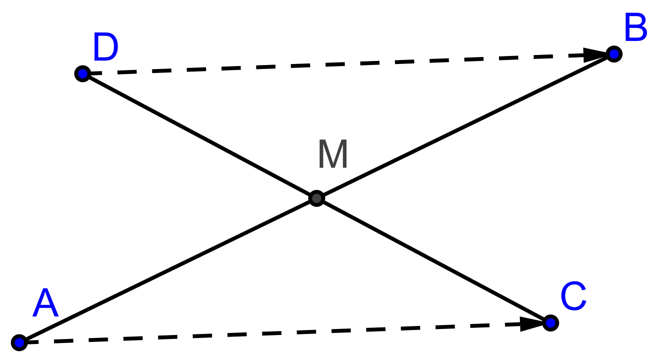
Ma c'è un caso che abbiamo escluso fin qui: quello in cui λ e μ sono opposti...

Differenze di punti

Se vogliamo un calcolo geometrico con buone proprietà algebriche, dobbiamo ammettere l'esistenza di forme del tipo $A - B$.

Per comprendere il significato fisico e geometrico di espressioni del tipo $A - B$, con A e B punti di massa unitaria, osserviamo che se i segmenti AB e CD hanno lo stesso punto medio M, allora si ha:

$$A + B = 2M = C + D$$



I segmenti AB e CD hanno lo stesso punto medio M

L'uguaglianza $A + B = C + D$ si può riscrivere come

$$C - A = B - D$$

Dunque le differenze di punti non sono oggetti tutti distinti ma si devono considerare *classi di equivalenza*.

La differenza $C-A$ determina una coppia ordinata (A, C) o segmento orientato AC; due sementi orientati AC e DB risultano uguali se

- essendo allineati, hanno la stessa lunghezza e sono ugualmente orientati

- non essendo allineati, sono lati opposti ugualmente orientati di un parallelogramma

Dunque la differenza $C - A$ è ciò che oggi chiamiamo il *vettore* $\overrightarrow{AC}$

Per i vettori vale l'uguaglianza:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

Nelle notazioni di Grassmann l'uguaglianza diventa:

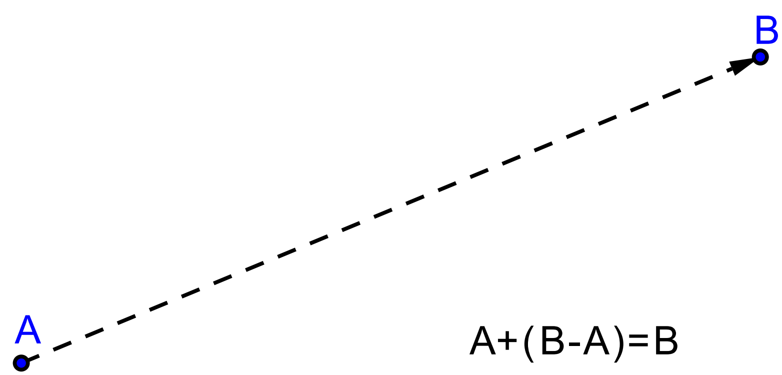
$$C - A + B - C = B - A$$

Peano disse, riferendosi al calcolo con le notazioni di Grassmann:

> *"Esso permette di operare e ragionare con un grande risparmio di sforzo e di memoria; poiché in questo nuovo calcolo si opera come in un calcolo già conosciuto. Questo metodo risponde quindi al principio del minimo sforzo, il quale sussiste non solo in meccanica, ma anche in didattica."*

Vettore e traslazione

Il traslato del punto A per il vettore $B - A$ è il punto B



traslazione di un punto A per un vettore $B - A$

Prodotto di un vettore per uno scalare

Ci si aspetta che sia possibile scrivere il prodotto

$$\lambda(B - A)$$

come differenza di due punti di massa unitaria.

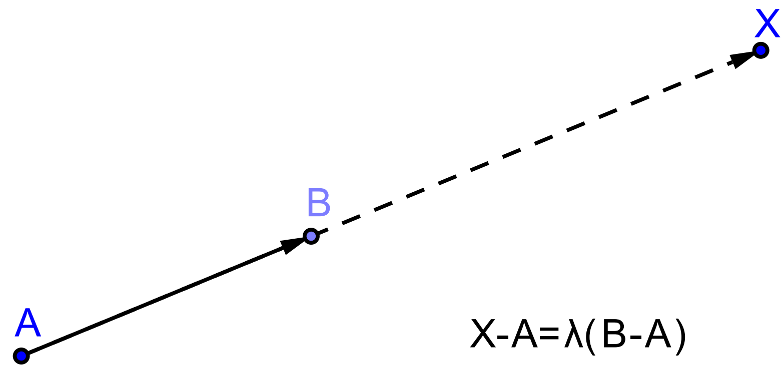
Impostiamo l'equazione

$$\lambda(B - A) = X - A$$

Si ottiene:

$$X = \lambda B + (1 - \lambda)A$$

L'equazione ammette una e un'unica soluzione, in un punto X allineato con A e B.



AX è multiplo scalare di AB

Se si fissa $B - A$ come unità di misura, λ è la misura (orientata) del vettore $X - A$

Viceversa ogni punto X della retta AB, esprimibile come $X = \lambda B + (1 - \lambda)A$, si può anche esprimere come

$$X = A + \lambda(B - A)$$

cioè come somma del punto A e di tutti i multipli scalari del vettore $B - A$.

Somma di vettori

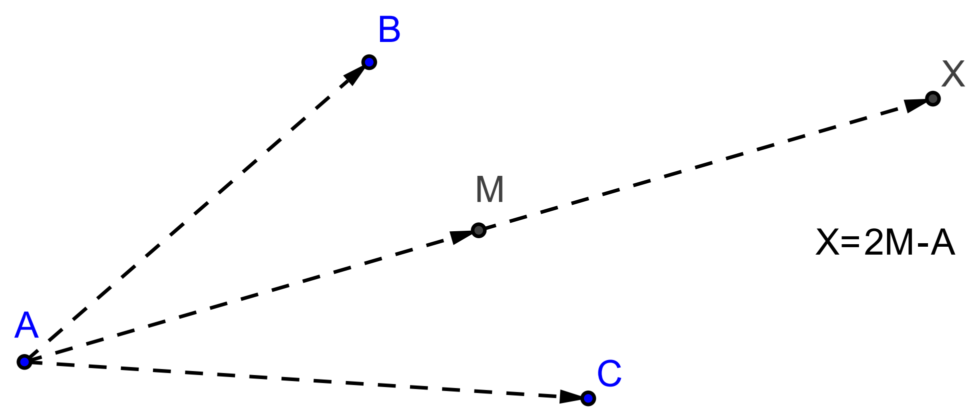
Possiamo ricondurci al caso di due vettori $B-A$ e $C-A$ e cercare il punto X tale che:

$$X - A = B - A + C - A$$

ovvero

$$X = A + (B + C - 2A) = A + 2(M - A)$$

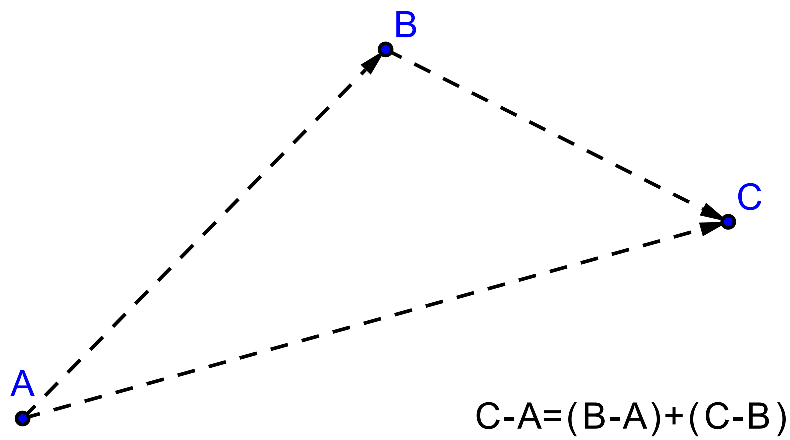
Si trasla A del vettore doppio di $M - A$, dove M è il punto medio del segmento BC



regola del parallelogrammo

Si tratta della ben nota *regola del parallelogrammo*.

Ovviamente la somma di vettori con il metodo della poligonale (o “testa-coda“) diventa una pura banalità algebrica con le notazioni di Grassmann



Il vettore $C - A$ è somma dei vettori $B - A$ e $C - B$

I vettori come punti all'infinito

Consideriamo il vettore $B - A$ come la posizione limite per $t \longrightarrow 1^{+}$del punto X determinato dall'equazione

$$(t-1)X = tB - A$$

facendo tendere t ad 1, il punto X si allontana all'infinito dalla parte di B, e la sua massa tende a zero.

Possiamo pensare il vettore $B - A$ come un punto all'infinito, dalla parte di B, della retta AB.

Si tratta di un punto all'infinito orientato e con massa.

Il vettore $\lambda(B - A)$ rappresenta lo stesso punto all'infinito, e la sua lunghezza λ, rispetto ad AB, può essere vista come la grandezza intensiva (massa) ad esso associata.

FORME DI PRIMA SPECIE

Una generica *forma di prima specie* è una *combinazione lineare di punti*, a coefficienti (masse) reali.

Essa si riduce a:

- un punto (baricentro del sistema) di massa uguale alla somma delle masse se questa è $\neq 0$

- un vettore (si sommano tutti i punti a massa positiva e si ottiene un certo λP, poi quelli a massa negativa e si ottiene un certo $-\lambda Q$, ecc.)

Prodotti di punti

Che significato fisico e geometrico dare al prodotto AB di due punti di massa unitaria?

Grassmann pensa inizialmente al segmento AB, ed è assillato da un'uguaglianza, valida per C interno al segmento AB:

$$AC + CB = AB$$

Grassmann intuisce l'importanza di estendere questa uguaglianza ad ogni C allineato con A e B, anche esterno al segmento; questo lo porta ad ammettere

$$AB + BA = AA$$

$$2AA = AA$$

Dalla seconda uguaglianza segue che $AA = 0$; sostituendo nella prima si ha

$$AB = -BA$$

ovvero la proprietà *anticommutativa* del prodotto di punti; quindi i segmenti associati al prodotto AB sono orientati.

Ulteriore conseguenza:

Il prodotto di punti è anche prodotto di un punto per un vettore, e viceversa:

$$AB = A(B - A)$$

$$A(C-B) = A(D-A) = AD$$

con $D = A + C - B$

Grassmann chiamava *linee* i prodotti di punti.

Scrivendo la linea come prodotto di un punto per un vettore si scopre che per ogni punto

$$X = \lambda A + (1-\lambda)B$$

si ha:

$$X(B-A) = \lambda AB + (1-\lambda)AB = A(B-A)$$

Viene in mente l'interpretazione fisica della linea $X(B-A)$ come *vettore applicato*: il vettore $B-A$ applicato al punto X.

Prodotto di una linea per uno scalare

Cerchiamo X tale che

$$\lambda AB = AX$$

ovvero

$$\lambda A(B - A) = A(X - A)$$

Basta trovare X tale che

$$X - A = \lambda(B - A)$$

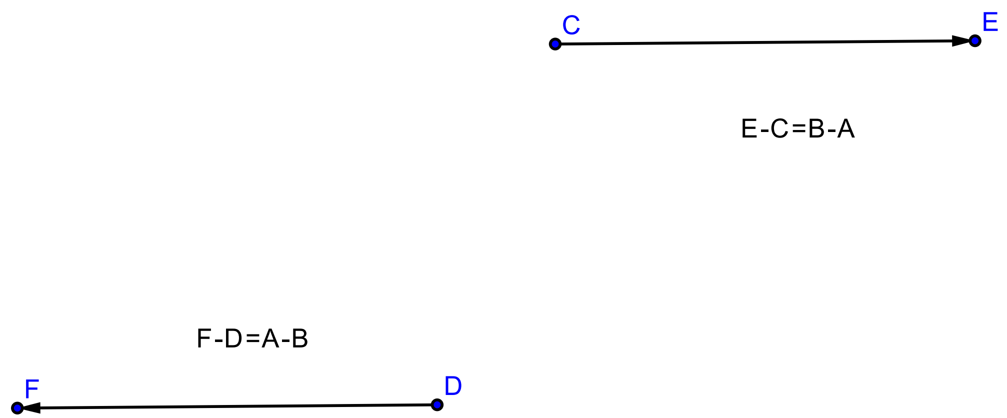
Dunque la linea λAB è una linea AX di lunghezza (orientata) λ rispetto ad AB.

Somma di linee

- se due linee sono allineate, la somma avviene nel modo ovvio
- se le due linee sono parallele, si sommano come se fossero punti con masse uguali alle lunghezze dei vettori ad esse associate
- se le due linee giacciono su rette incidenti, si possono pensare applicate allo stesso punto, e si ritrova la regola del parallelogramma
- se le due linee giacciono su rette sghembe, la somma non è riducibile ad una linea

Caso particolare: la *coppia*

Supponiamo di voler sommare due linee CE e DF, associate a vettori opposti $B - A$ e $A - B$, applicati in punti C e D rispettivamente.

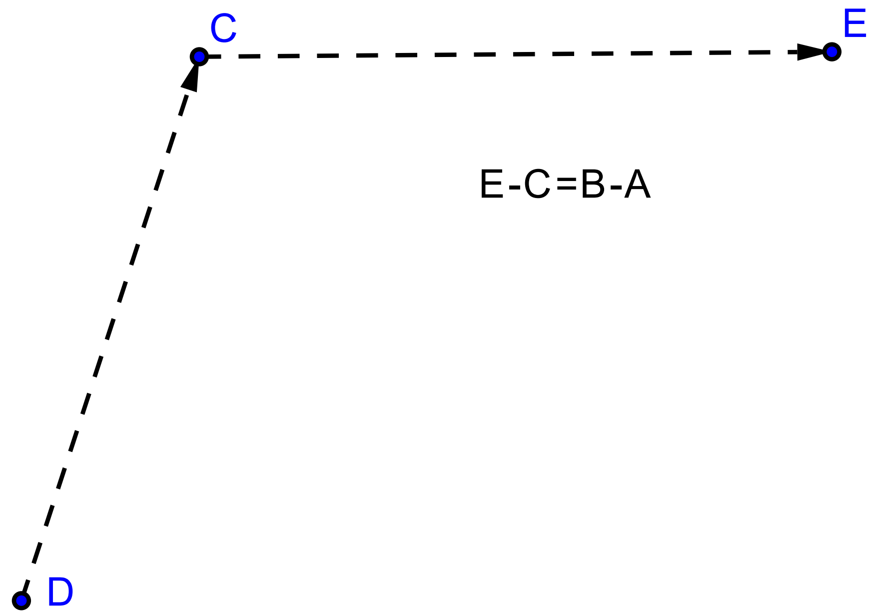


Somma di due linee parallele, di uguale lunghezza e verso opposto

Si può anche scrivere:

$$C(B-A)+D(A-B)=(C-D)(B-A)$$

si ottiene un *bivettore*, o *coppia*, per usare il termine fisico.



bivettore, prodotto dei vettori $C-D$ e $B-A$

Si può dimostrare che la coppia dipende solo dall'area orientata del parallelogrammo formato dai vettori $C-D$ e $B-A$ (in questo ordine).

FORME DI SECONDA SPECIE

Si può dimostrare che le forme di seconda specie (combinazioni lineari a coefficienti lineari di linee) sono riducibili a

- una linea oppure
- un bivettore oppure
- la somma di un bivettore e di una linea

Appendice: Il vettore come *bordo orientato* di una linea

Si può pensare alla differenza $B - A$ come *bordo orientato* della linea AB: il bordo di AB è infatti formato dai punti A e B con A ‘‘entrante‘‘ (negativo) e B ‘‘uscente‘‘ (positivo).

Prodotti di tre punti

Procedendo oltre, si possono considerare i prodotti del tipo ABC, con A, B, C punti di massa unitaria.

La terna ordinata ABC si associa ad un triangolo orientato (brevemente *triangolo*).

Permutazioni pari dei vertici determinano lo stesso triangolo, quelle dispari il triangolo opposto.

Si sceglie convenzionalmente un verso positivo (antiorario) per la grandezza associata a questa forma.

Usando le proprietà delle operazioni (associativa, commutativa della somma, distributiva, anticommutativa del prodotto) si può dimostrare che:

- il triangolo è anche il prodotto di due punti per un vettore, o di un punto per un bivettore

- $ABC = 0$ se e solo se i punti sono allineati

- la forma ABC dipende solo dall'area orientata del triangolo ABC

- se si scrive il triangolo come prodotto di un punto per un bivettore, sostituendo il punto con un punto complanare si ottiene la stessa forma

- la somma di triangoli che giacciono su piani paralleli è analoga alla somma di linee parallele, e dà luogo ad un triangolo o a un trivettore

- la somma di triangoli che giacciono su piani incidenti è analoga alla somma di linee su rette incidenti e dà luogo ad un opportuno triangolo

- nello spazio ordinario non ci sono piani sghembi, tuttavia... (spazi di dimensione maggiore?...)

FORME DI TERZA SPECIE

Una forma di terza specie (combinazione lineare a coefficienti reali di triangoli) *nello spazio ordinario a tre dimensioni* può essere

- un triangolo
- un trivettore

Coordinate

Se X è un punto di massa unitaria nel piano ABC, possiamo scrivere X come combinazione lineare a coefficienti reali

$$X = \lambda A + \mu B + \nu C$$

con $\lambda + \mu + \nu = 1$.

I coefficienti si possono determinare moltiplicando l'equazione

$$X = \lambda A + \mu B + \nu C$$

alternativamente per BC, per AC, per AB; si ottiene:

$$XBC = \lambda ABC$$

Ovvero λ è l'area del triangolo orientato XBC rispetto ad ABC; analogamente per gli altri coefficienti (Regola di Cramer).

Appendice: il bivettore come *bordo orientato* di un triangolo

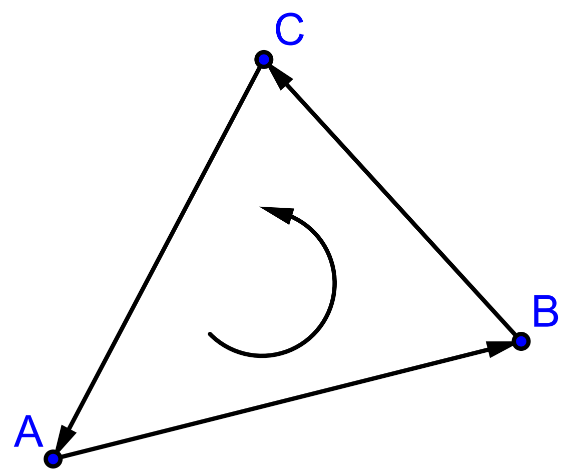
Consideriamo un triangolo ABC; il bivettore

$$(B - A)(C - B)$$

sviluppando il prodotto, diventa:

$$BC - AC + AB = BC + CA + AB$$

ovvero il *bordo orientato* del triangolo ABC.



(B-A)(C-B)=BC-AC+AB

La coppia $B(C-B)+A(B-C)$ è equivalente al bivettore $(B-A)(C-B)$, che è equivalente a $BC-AC+AB$, il bordo orientato del triangolo ABC.

TETRAEDRI

Si dice *tetraedro* il prodotto di 4 punti: $ABCD$.

Valgono le seguenti proprietà, *nello spazio ordinario tridimensionale*:

- il tetraedro è anche il prodotto di tre punti per un vettore, di due punti per un bivettore, di un punto per un trivettore

- $ABCD = 0$ se e solo se i punti sono complanari

- la forma $ABCD$ dipende solo dal volume orientato del tetraedro $ABCD$

- se si scrive il tetraedro come prodotto di un punto per un trivettore, e se si sostituisce il punto con qualsiasi altro punto dello spazio si ottiene la stessa forma

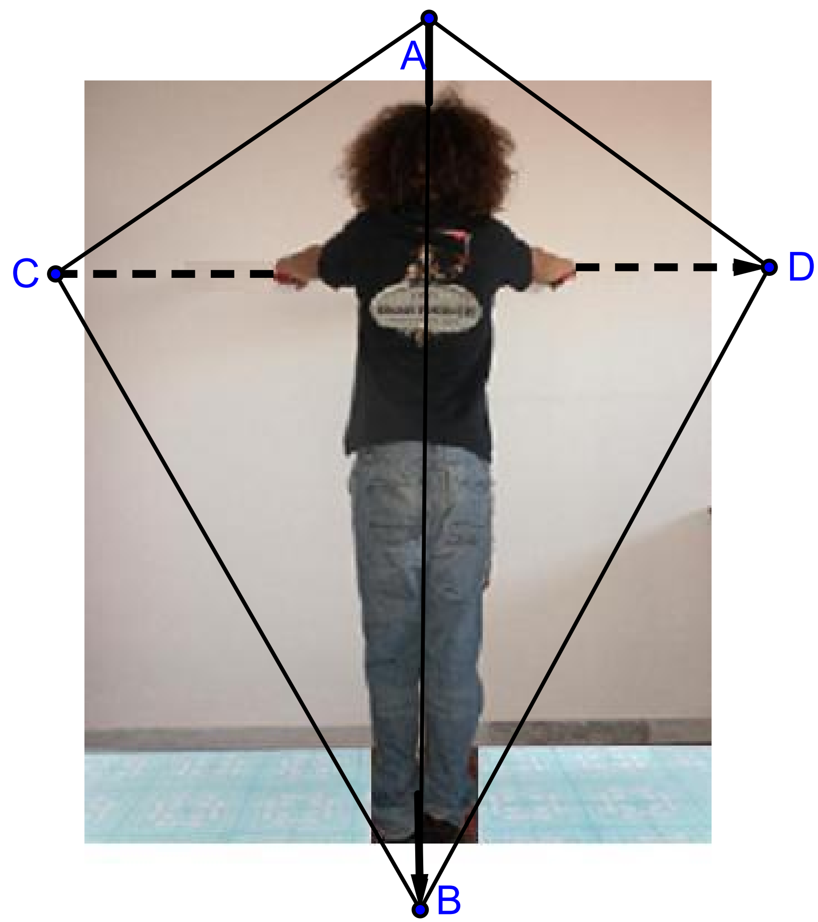
- ogni forma non nulla di quarta specie è un tetraedro

- dati due tetraedri, è sempre possibile scrivere il primo come multiplo scalare del secondo

- il trivettore si può vedere come *bordo orientato* di un tetraedro

Per assegnare un verso convenzionale positivo al volume del tetraedro, si può usare la regola descritta da Peano:

> *"(...) "destrorso", se una persona col capo in A, coi piedi in B e rivolta verso CD ha alla sua sinistra C e alla sua destra D."*



Il tetraedro $ABCD$: lo spigolo AB è quello visibile; lo spigolo CD è quello posto davanti alla persona, nascosto dalle facce ACB e ADB del tetraedro.

CONCLUSIONI

Ogni cosa detta fin qui è estendibile a spazi di dimensione superiore, con modifiche e adattamenti in gran intuibili; questa possibilità di sollecitare l'intuizione del lettore entusiasmava Grassmann che non si accontentava del rigore, ma considerava come caratteristica imprescindibile di una trattazione scientifica quella di mettere il lettore "*(...) nella condizione di abbracciare ad ogni passo dello sviluppo l'orientamento preso dal suo progredire (..)*". Una preoccupazione che Grassmann non vede sempre presente negli scritti di matematica:

“(...) Spesso, ci sono dimostrazioni di cui non è possibile capire nulla, fin dall’inizio, della direzione in cui esse conducono, se non tenendo presente il teorema che le precede; dimostrazioni mediante cui si giunge finalmente - fatto improvviso ed inaspettato - alla verità dimostrata, dopo aver seguito ciecamente, e col pericolo costante di perdere il filo, ogni singolo passo. Dimostrazioni di questo tipo forse non lasciano niente a desiderare sul piano del rigore, ma esse non sono scientifiche; in esse manca la seconda esigenza, la veduta d’insieme. E’ per questo che colui che segue una di tali dimostrazioni non giunge alla conoscenza libera della verità, ma resta totalmente dipendente dalla maniera

particolare attraverso cui vi si giunge, a meno che non sia lo stesso lettore a crearsi autonomamente, in un secondo momento, una visione d'insieme; e questo sentimento di mancanza di libertà, che nasce fin dal primo istante in cui il lettore comincia ad essere recettivo, è ancor più pesante per chiunque abbia l'abitudine di pensare in modo libero e indipendente, e di acquisire liberamente e autonomamente tutto ciò che apprende. Se invece il lettore, ad ogni passo dello sviluppo, è messo in condizione di vedere dove sta andando, allora resta padrone della materia, non è più vincolato alla forma particolare della presentazione, e l'assimilazione diviene veramente efficace."

(dalla prefazione dell'Ausdehnungslehre)